

ಸುಬೋಧ
ಬೀಜಗಣಿತ

Copyright ಭಾಗ ೩ ೧೯೭೦

ಕೆ.ಪಿ. ಮತ್ತು ಮನೋಹರ



೧೮ ಲಾಂಗಮನ್

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

ಮೂರನೆಯ ಭಾಗ

1954 1210

ಲೇಖಕರು

ಪ್ರಾಂ. ಶ್ರೀ. ಕಟ್ಟಿ, ಎಮ್. ಎ. (ಕೆಂಬೆಲ್),

ಮಾಜೀ ಸೀನಿಯರ್ ಸ್ಕಾಲರ್, ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಕಾಲೇಜು, ಕೇಂಬ್ರಿಜ್.
ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಎಲ್‌ಫಿನ್‌ಸ್ಟನ್ ಕಾಲೇಜು, ಮುಂಬಯಿ.
ಮತ್ತು ಮಾಜೀ ಪ್ರಧಾನ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕೆಂಡರಿ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಕಾಲೇಜು, ಬೆಳಗಾವಿ.

ಮತ್ತು

ವಾ. ಪ್ರಾಂ. ಖಾನೋಲಿಕರ, ಎಮ್. ಎ. (ಲಂಡನ್),

ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಾಜೀ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಸೆಕೆಂಡರಿ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ ಕಾಲೇಜು, ಬೆಳಗಾವಿ.
ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಲಂಡಿಯನ್ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್
ಎಜ್ಯುಕೇಶನ್, ಮುಂಬಯಿ.

ಮತ್ತು ಆ. ಗ. ಬೀಚರ್ಸ್ ಕಾಲೇಜು, ಅಹಮದಾಬಾದ್.



ಓರಿಎಂಟೆ

ಮುಂಬಯಿ

ಲಾಂಗಮನ್

ಕಲಕತ್ತಾ

ಲಿಮಿಟೆಡ್

ಮದ್ರಾಸು

ಎಲ್ಲ ತರಹದ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಮಾಡರಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಸುಲಭ, ಮಧ್ಯಮ ತರಗತಿಯ ಮತ್ತು ಗಡುಜಾದ ಹೇರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಶಕ್ತಿಗನಿಸುವಂತೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅರಿಸಲು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಅಸ್ಪದವಿದೆ.

ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅದಷ್ಟು ಉಪಯೋಗವುಳ್ಳದ್ದಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದೆ. ಪುಸ್ತಕದ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕಮಿತ್ರರು ಕೆಲವು ವಿಧಾಯಕ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವರದಿಂದ ಮತ್ತು ಅಭಾರಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಲಾದೀತು. ಅವರಂತೆಯೇ ದೃಷ್ಟಿಸ್ಪರ್ಶದೊಳಗಿಂದ ಜಾರಿದ ಮುಪ್ರಣ ವೋಷಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಉತ್ತರಗಳೊಳಗಿನ ಬುಳಿದು ಹೋದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನೂ ತೋರಿಸಿದರೆ ನಾವು ಬಹಳ ಅಭಾರಿಯಾಗುವೆವು. ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪತ್ರವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ನಾ. ಪಾಂ. ಖಾನೋಲಕರ ಇವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಕರ ವಿಳಾಸಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು.

ಕೆಲವು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು

ಅನುಕೂಲ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು
ಮಾಡುವುದು= Suitable group-
ing.

ಅನುವಾಕ= Section
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಭಜಕರಣ= Splitting up a fraction into
partial fractions

ಅಕ್ಷ, ಸಮವರ್ತಕಾಕ್ಷ= Axis
ಆದೇಶ= Substitute
ಆದೇಶಿಸು, ಉತ್ಪಾದಿಸು= To Sub-
stitute

ಆರಂಭಸ್ಥಾನ, ಪ್ರಸ್ಥಾನಬಿಂದು= Origin
ಎಕಕೋಟಿಕ= Of the first
degree

ಕೋಟಿ, ಘಾತಸರಿಮಾಣ= Degree
ಕೋಟ್ಯಂತರ, ಕೋಟಿ= Ordinate
ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ= Factor
theorem

ಚಕ್ರೀಯ= Cyclic
ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ= Cyclic order
ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿ= Cyclic
expression

ಚರ= Variable
ಛೇದ= Intercept
ಬಿಂದು= Point of
intersection
ಟಿಕ= Of the third

ದ್ವಿಕೋಟಿಕ= Of the second

ಪರತಂತ್ರ, ಪರಾಧೀನ ಚರ= Dependent variable
ಪರಂಪರಿತ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ= Continued fraction

ಪಾದ= Quadrant
ಪ್ರತಿಸ್ಥಾನ= Substiute
ಪ್ರಭಾಗ ಜಾತಿ (ಮಿಶ್ರ) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ= Complex fraction

ಫಲ= Function
ಬಿಂದು= Point
ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು= To
plot a point
ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕ= Mixed number

ಭುಜಾಂತರ, ಭುಜ= Abscissa
ಮಾನ, ಏಕಾಂಕ= Unit
ಯಥಾಕ್ರಮ ಏಕೀಕರಣ= Successive grouping
ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ= Conversion

ರೇಖಾಲೇಖ= Line graph
ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದ= Quadratic
trinomial

ವಿಭಾಜಕ= Factor
ವಿಭಾಜ್ಯ= Multiple
ಶೇಷಸಿದ್ಧಾಂತ= Remainder
theorem

ಸಮಕೋಟಿ, ಸಮಘಾತ= Homogenous

ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ= Equian-
gular triangle

ಸಮಚ್ಛೇದ= Common

Denominator

ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ, ಸಂಮಿತ=

Symmetrical

ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತಿಯನ್ನು

ಮಾಡುವದು= To Satisfy an
equation

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ= Coordinate

ಸಂಗತ= Corresponding

ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ= Column graph

ಸ್ಥಿರಪದ= Constnt term

ಸ್ವತಂತ್ರ (ಸ್ವಾಧೀನ) ಚರ= In-
dependent variable

ಕ್ಷಿತಿಜಲಂಬ= Vertical

ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ= Horizontal

ಪ್ರಸ್ತುತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ
ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಜಿನ್ನಹ.

ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ತಿದ್ದುಪಡಿಯನ್ನು

ಪುಟ	ಉದಾಹರಣೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಬಿಪ್ಪು
	ಉ. ೬	ಬ = ೧ಮ = ೩	ಬ = -೧, ಮ
೨೩	ಸಾ. ೧೯	೬೦೦-೧೨	೬೦೦-೧೩
೨೪	ಉ. ೧೧	೨೨೨	೨೨
೩೦	ಉ. ೧೩	-(ನ-೪ಮ)೩	(೪ನ-ಮ)೩
	ಉ. ೧೩	(ಯ+೨-ಸ)೩	(ಯ-೨-ಸ)೩
೩೮	ಉ. ೮	ಪಮ	ಪ೨ಮ೨
	ಉ. ೧೮	ಮ	ಮ೪
೪೧	ಉ. ೪	೯	೯೦
೬೫	ಉ. ೧೯	+ ೬	- ೬
೭೫	ಉ. ೩	ತ(೬-ನ೨)	ತ(೬೨-ನ೨)
೮೭	ಉ. ೨	೨೦	೩೦
	ಉ. ೪	೧೯ಯ	೫೮ಯ
೧೨೩	ಉ. ೨೩	೩೨ಮ೨	೫೨ಮ೨
	ಉ. ೨೩	೫೮+೩	೫೮-೩
೧೨೭	ಉ. ೧೪	+ ೨ ೪ಯ೨+೧	+ ೩ ೪ಯ೨+೧
೧೪೨	ಉ. ೧೮	- ೧ ಮ೨	- ೧ ಮ೨

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಪ್ರಕರಣ	ಪುಟ
೧. ವಿಸ್ತಾರಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಜನೆ	೧
೨. ಗುಣಸ್ವತ್ವಕ್ಕುರಣ (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು)	೨೫
೩. ಗುಣಸ್ವತ್ವಕ್ಕುರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು	೫೦
೪. ಮ. ಸಾ. ವಿ- ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.	೭೬
೫. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ	೧೦೧
೬. ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು	೧೫೭
೭. ಅಲೇಖ	೧೭೮
ಪರಿಚ್ಛೇದಕ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಗಳು (೧—೬)	೨೩೯
ಉತ್ತರಗಳು	೨೪೮

$$\begin{aligned}
 ೩. \quad (ಪ + ಮ)^೨ &\equiv ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ \\
 &\equiv ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨ + ೪ಪಮ \\
 &\equiv (ಪ - ಮ)^೨ + ೪ಪಮ
 \end{aligned}$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಅಧಿಕ ಆ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕಡಿ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 ೪. \quad (ಪ - ಮ)^೨ &\equiv ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨ \\
 &\equiv ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ - ೪ಪಮ \\
 &\equiv (ಪ + ಮ)^೨ - ೪ಪಮ
 \end{aligned}$$

ಅಂದರೆಯೇ, ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ = ಆ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕಡಿ.

$$\begin{aligned}
 ೫. \quad (ಪ + ಮ)^೨ + (ಪ - ಮ)^೨ &\equiv ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ + ಪ^೨ - \\
 &\quad ೨ಪಮ + ಮ^೨ \equiv ೨ಪ^೨ + ೨ಮ^೨
 \end{aligned}$$

$$\therefore (ಪ^೨ + ಮ^೨) \equiv \frac{1}{2} \{ (ಪ + ಮ)^೨ + (ಪ - ಮ)^೨ \}$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 ೬. \quad (ಪ + ಮ)^೨ - (ಪ - ಮ)^೨ &\equiv (ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨) - \\
 &\quad (ಪ^೨ - ೨ಪಮ + ಮ^೨) \\
 &\equiv ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ - ಪ^೨ + ೨ಪಮ - ಮ^೨ \\
 &\equiv ೪ ಪಮ.
 \end{aligned}$$

$$\therefore ಪಮ \equiv \frac{1}{4} \{ (ಪ + ಮ)^೨ - (ಪ - ಮ)^೨ \}$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗ ಉಣಾ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದ ವರ್ಗ ಇದರ ಒಂದು ನಾಲ್ಕಾರುಶೇಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ.

೧.೨. ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯಸಮಗಳೊಳಗಿನ ಕೆಲವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉ. ೧. ಪ + ಮ = ೭ ಮತ್ತು ಪಮ = ೧೨ ಇದ್ದರೆ ಪ^೨ + ಮ^೨ = ?

$$ಪ + ಮ = (ಪ + ಮ)^೨ - ೨ ಪಮ \quad (೧)$$

$$= (೭)^೨ - ೨ \cdot ೧೨$$

$$= ೪೯ - ೨೪$$

$$= ೨೫.$$

ಉ. ೨. ನ - ಮ = ೪, ಮತ್ತು ನಮ = ೫ ಇದ್ದರೆ ನ^೨ + ಮ^೨ = ?

$$ನ + ಮ = (ನ - ಮ)^೨ + ೨ನಮ \quad (೨)$$

$$= ೪^೨ + ೨ \cdot ೫$$

$$= ೧೬ + ೧೦$$

$$= ೨೬.$$

ಉ. ೩. ಯ - $\frac{೧}{ಯ}$ = ೫ ಇದ್ದರೆ ಯ^೨ + $\frac{೧}{ಯ^೨}$ = ೨೭ ಎಂಬುದನ್ನು

ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$ಯ + \frac{೧}{ಯ} = (ಯ - \frac{೧}{ಯ})^೨ + ೨ಯ \cdot \frac{೧}{ಯ} \quad (೩)$$

$$= (೫)^೨ + ೨$$

$$= ೨೭.$$

ಉ. ೪. ನ + $\frac{೧}{ನ}$ = ೭, ಇದ್ದರೆ ನ^೨ + $\frac{೧}{ನ^೨}$ = ?

$$ನ + \frac{೧}{ನ} = (ನ + \frac{೧}{ನ})^೨ - ೨ನ \cdot \frac{೧}{ನ} \quad (೧)$$

$$= (೭)^೨ - ೨$$

$$= ೪೭.$$

ಉ. ೫. ಕ-ಗ=೩ ಮತ್ತು ಕಗ=೨೮ ಇದ್ದರೆ $(ಕ+ಗ)^೨ = ?$
 $(ಕ+ಗ)^೨ = (ಕ-ಗ)^೨ + ೪ ಕಗ$ (೩)
 $= ೩^೨ + ೪ \cdot ೨೮$
 $= ೯ + ೧೧೨$
 $= ೧೨೧.$

ಮೇಲ್ಕಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿವಂತೆ ಸಹ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.

ಉ. ೧. $ಪ+ಮ=೨$
 ವರ್ಗ ಮಾಡಿ $ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ = ೪$
 $\therefore ಪ^೨ + ಮ^೨ + ೨ = ೪$ [$\because ಪಮ=೧$]
 ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ $ಪ^೨ + ಮ^೨ = ೪ - ೨ = ೨$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಿಂದ ವರ್ಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೨. ಯ = ೫ ಮತ್ತು ರ = ೩ ಇದ್ದರೆ $೨೫ಯ^೨ - ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ = ?$
 $೨೫ಯ^೨ - ೨೦ಯರ + ೪ರ^೨ = (೫ಯ)^೨ - ೨ \cdot ೫ಯ \cdot ೨ರ$
 $+ (೨ರ)^೨$
 $= (೫ಯ - ೨ರ)^೨$
 $= (೫ \times ೫ - ೨ \times ೩)^೨$
 $= (೨೫ - ೬)^೨$
 $= (೧೯)^೨$
 $= ೩೬೧.$

ಉ. ೩. $(ಪ+ಬ-ಮ)^೨ + ೨ (ಪ+ಬ-ಮ) (ಪ-ಬ+ಮ) +$
 $(ಪ-ಬ+ಮ)^೨$ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪ ಕೊಡಿ.
 $(ಪ+ಬ-ಮ)$ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯ ಎಂದ ಮತ್ತು
 $(ಪ-ಬ+ಮ)$ ದ ರ ಎಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಯ}^{\circ} + \text{೨ ಯರ} + \text{ರ}^{\circ} \quad * \\
 &= (\text{ಯ} + \text{ರ})^{\circ} \quad * \\
 &= \{ (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) + (\text{ಪ} - \text{ಬ} + \text{ಮ}) \}^{\circ} \\
 &= (\text{೨ಪ})^{\circ} \\
 &= \text{೪ಪ}^{\circ}.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೮. $(\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})^{\circ} + (\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})^{\circ}$
 $= ೨(\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})(\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})$
 ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$(\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})$ ವ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಯ ಎಂಬ ಮತ್ತು
 $(\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ})$ ವ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ರ ಎಂಬ ಮಾಡಿದರೆ,
 $\text{ರಾಶಿಯು} = \text{ಯ}^{\circ} + \text{ರ}^{\circ} - ೨\text{ಯರ} \quad *$
 $= (\text{ಯ} - \text{ರ})^{\circ} \quad *$
 $= \{ (\text{ಕಪ} - \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ}) (\text{ಕಪ} + \text{ಗಬ} - \text{ಘಮ}) \}^{\circ}$
 $= (- ೨ \text{ಗಬ})^{\circ}$
 $= ೪ \text{ಗಬ}^{\circ}.$

* ಯ, ರ, ಈ ಅವೇಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೇ ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಿಡಲು
 ಇರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $(\text{೩ತ} + \text{ನ})^{\circ} - ೨(\text{೩ತ} + \text{ನ})(\text{೩ತ} - \text{ನ}) + (\text{೩ತ} - \text{ನ})^{\circ}.$
೨. $(\text{೩ಯ} - ೨ರ)^{\circ} + ೨(\text{೩ಯ} - ೨ರ)(\text{೨ರ} + ೩ಯ) + (\text{೨ರ} + ೩ಯ)^{\circ}.$
೩. $(\text{೩ಪ} - ೪ಮ)^{\circ} + ೨(\text{೩ಪ} - ೪ಮ)(\text{೪ಮ} - ೩ಪ) + (\text{೪ಮ} - ೩ಪ)^{\circ}.$
೪. $(\text{೩ಕ} + ೩ಗ)^{\circ} - ೨(\text{೩ಕ} + ೩ಗ)(\text{೩ಗ} + ೪ಘ) + (\text{೩ಗ} + ೪ಘ)^{\circ}.$

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

೫. $(ಅಕ-ಒಗ+ಖಘ)^೨ + ೨(ಅಕ-ಒಗ+ಖಘ)$
 $(ಒಗ-ಖಘ+ಓಕ) + (ಒಗ-ಖಘ+ಓಕ)^೨.$
೬. $ಪ=೨, ಬ=೧, ಮ=೨$ ಇದ್ದರೆ $೪ ಪ೦ಬ೨ + ೧೨ ಮಮ + ೨ಮ೨ = ೫$
೭. $ಅ=೧, ಕ= -೨, ಗ=೨$ ಇದ್ದರೆ $೧೬ಅ೨-೪೦ಅಕಗ+೨೫ಕ೨ಗ೨ = ?$
೮. $ಅ=೨, ಕ= -೨, ಗ=೪$ ಇದ್ದರೆ $(ಅಕ-ಕ+೨ಗ)೨$
 $-೨ (ಅಕ-ಕ+೨ಗ) (ಅ-೨ಕ-೨ಗ) + (ಅ-೨ಕ-೨ಗ)೨ = ?$
೯. $ಅ+ಕ=೧೦, ಮತ್ತು ಅಕ= -೨$ ಇದ್ದರೆ $ಅ೨+ಕ೨ = ?$
೧೦. $ತ-ನ= -೨$ ಮತ್ತು $ತನ= -೪$ ಇದ್ದರೆ $ತ೨+ನ೨ = ?$
೧೧. $ಪ+ಮ= ೬$ ಮತ್ತು $ಪಮ= ೮$ ಇದ್ದರೆ $(ಪ-ಮ)೨ = ?$
೧೨. $ಯ-ರ=೧೦$ ಮತ್ತು $ಯರ= -೧೬$ ಇದ್ದರೆ $(ಯ+ರ)೨ = ?$

ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ :

೧೩. $ಅ + \frac{೧}{ಅ} = -೫$ ಇದ್ದರೆ $ಅ೨ + \frac{೧}{ಅ೨} = ೨೩.$
೧೪. $ಕ - \frac{೧}{ಕ} = -೪$ ಇದ್ದರೆ $ಕ೨ + \frac{೧}{ಕ೨} = ೧೮.$
೧೫. $ಯ + \frac{೧}{ಯ} = ೮$ ಇದ್ದರೆ $ಯ೨ + \frac{೧}{ಯ೨} = ೮೨ \dots ೨.$
೧೬. $ಯ - \frac{೧}{ಯ} = ೬$ ಇದ್ದರೆ $ಯ೨ + \frac{೧}{ಯ೨} = ಕ೨ + ೨.$
೧೭. $ಬ + \frac{೧}{ಬ} = -೭$ ಇದ್ದರೆ $ಬ೨ + \frac{೧}{ಬ೨} = ?$
೧೮. $ಪ - \frac{೧}{ಪ} = ೮$ ಇದ್ದರೆ $ಪ೨ + \frac{೧}{ಪ೨} = ?$
೧೯. $ಪ + \frac{೧}{ಪ} = ೪$ ಇದ್ದರೆ $(ಪ - \frac{೧}{ಪ})೨ = ?$
೨೦. $ನ - \frac{೧}{ನ} = -೨$ ಇದ್ದರೆ $(ನ + \frac{೧}{ನ})೨ = ?$

ದ್ವಿಪದವರ್ಗವಿಸ್ತಾರದ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ (ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯದನ್ನು ಬರೆದು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವದು.

೧. ೩. ಈಗ ನಾವು ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವೊಳಗಿನ ಮೂರೂ ಪದಗಳ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಇರುವ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವ ತರಹದ್ದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವೆವು.

$$(ಪ+ಮ)^2 \equiv ಪ^2 + ೨ಪಮ + ಮ^2 \text{ ಮತ್ತು}$$

$$(ಪ-ಮ)^2 \equiv ಪ^2 - ೨ಪಮ + ಮ^2$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದವು ಯಾವಾಗಲೂ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಇರುತ್ತದೆ.

ನಡುವಿನ ಪದ = ೨ × ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ.

ಇದು ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುವುದು. ಎರಡು ವರ್ಗಗಳೆರಡರ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ

	ಪ	ಮ	
ಪ	ಪ ^೨	ಪಮ	೫
ಮ	ಪಮ	ಮ ^೨	೪

ಆಕೃತಿ ೧

ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಪ^೨ + ಮ^೨ ದಲ್ಲಿ ಪ^೨ ಮತ್ತು ಮ^೨ ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ (ಪ ಮತ್ತು ಮಗಳ) ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು (೨ಪಮ)

ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಮಾತು ಪರೀಕ್ಷಿಸ್ತಕ್ಕವಾಗುವುದು. ಮೊದಲನೆಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ^೨ ಮತ್ತು ಮ^೨ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ೨ಪಮ ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಪ+ಮ ದ ವರ್ಗ

ಕ	ದ	ಫ	
ಪ	ಪಮ	(ಪ-ಮ) ^೨	೫
ಮ	ಧ	ಮ ^೨	೪

ಆಕೃತಿ ೨

ವಾಗುವೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಅಕ್ರಮಮೇಲಿಂದ ಪೂ + ಮೂ ಬೋಳೆಗಿಂದ ೨ ಪಮ ವನ್ನು ಕಳೆದುಬರುವ ರೇಖವು ಪ ಮ ದ ವರ್ಗವಿರುವದಿಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. **ಕಖಗಘ** ಮತ್ತು **ತಗಚಜ** ಈ ಚೌರಸಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಕ್ರಮಬೋಳೆಗಿಂದ **ಕಖನದ** ಮತ್ತು **ಧನಚಜ** ಈ ಎರಡು ಸಮಾನ ಕಾಪಿಕೋನ ಚೌಕೋನಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಕ್ರಮಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದರೆ **ದಧತಘ** ಈ ಚೌರಸವು ಉಳಿಯುವದು.

ಮೇಲಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರ್ಞಿನಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಜೇರ್ಞಿನೋಳಿಂದ ಆ ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ೧೦೦೨ + ೧೨೧೨ ಇದರಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ೧೦೨ ಮತ್ತು ೧೧೨ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ೨೨೦೨೨ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕಳೆದರೆ ಬರುವ ರಾಶಿಗಳು ೧೦೦೨ + ೨೨೦೨೨ + ೧೨೧೨ ಮತ್ತು ೧೦೦೨ - ೨೨೦೨೨ + ೧೨೧೨ ಇವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಿರುವವು.

ಮೊದಲನೆಯದು ೧೦೨ + ೧೧೨ ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ೧೦೨ - ೧೧೨ ದ್ದು ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

೧.೪. ಅದರಂತೆಯೇ ನಡುವಿನ ಪದವು = ೨ × ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಇರುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ × ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ = ನಡುವಿನ ಪದದ ಚರ್ಛ.

∴ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು = ನಡುವಿನ ಪದದ ವರ್ಗ ಮೂಲ ÷ ಮೊದಲನೇ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ.

$$\begin{aligned} & ೧೦೦೨ \dots + ೧೨೧೨ \\ & = (೧೦೨)^೨ \dots + (೧೧೨)^೨ \\ & = (೧೦೨)^೨ \pm \\ & ೨. ೧೦೨.೧೧೨. + (೧೧೨)^೨ \\ & = (೧೦೨ + ೧೧೨)^೨ \end{aligned}$$

∴ ಕೊನೆಯ ಪದವು = (ನಮೂನೆಪದದ ಅರ್ಥ + ನೋಂದಣಿ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲ)².

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೆಯು ಇಲ್ಲವೆ ಪಡಾಬಾಕಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಪದದ ಅರ್ಥಕ್ಕೆ ನೋಂದಣಿ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರದ ಮರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಮರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಅಕ್ಕತಗಳಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಇವರ ಅರ್ಥ-ವ್ಯಾಸಂದರೆ ದ್ವಿಪದಿಯ ಮರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವೊಳಗಿನ ನಮೂನೆ ಪದ ಮತ್ತು ಬಾಳಿದ ಮೂರು ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಪದ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಬಾಳಿದ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ನಮಗೆ ಬರುವದು. ಬುದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೧೨೨ + ೧೨೨೨ ಇವರಲ್ಲಿ ೧೨೨೨ ದ ಅರ್ಥ ೬೨೨, ಇದಕ್ಕೆ ನೋಂದಣಿಯ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲ ೨೨ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೨೨. ಇವರ ಮರ್ಗ ೯೨೨ ನನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಮೂರೂ ಪದಗಳು ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ಮರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ೧೬೨೨ ಖಂಕಕ ಇವರಲ್ಲಿ ಖಂಕಕ ದ ಅರ್ಥ ೨೦೨೨, ಇದಕ್ಕೆ ನೋಂದಣಿ ಪದದ ಮರ್ಗಮೂಲ ೨೨ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ೨೨, ಇವರ ಮರ್ಗ ೨೨೨೨ ನನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ಮರ್ಗವಾಗುವದು. ನೋಂದಣಿಯದು ೨೨ + ೨೨ ಇವರ ಮರ್ಗವನ್ನು ಎರಡನೆಯದು ೨೨ ೨೨ ಇವರ ಮರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 & ೧೨೨ + ೧೨೨೨ + \dots \\
 & = (೨೨)² + ೨.೨೨.೨೨ + .. \\
 & = (೨೨)² + ೨.೨೨.೨೨ + \\
 & (೨೨)² \\
 & = (೨೨ + ೨೨)² \\
 & ೧೬೨೨ = ೨೦೨೨ + \dots \\
 & = (೨೨)² ೨.೨೨.೨೨ + \dots \\
 & = (೨೨)² ೨. ೨೨. ೨೨ + \\
 & (೨೨)² \\
 & = (೨೨ + ೨೨)²
 \end{aligned}$$

ದ್ವಿಪದಿಯ ಮರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ನೋಂದಣಿಯನ್ನು ಬರುವ ತೆಗೆಯಲು ಮೇಲವರೂ ಕೃತಿಯು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಬರುವದು. ಬುದಾಹರಣೆಗಾಗಿ + ೨೦೨೨ + ೨೨೨೨

ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ಲಿಖಿತ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಒಕೆ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ಒಕೆ, ಇದರ ವರ್ಗ ಒಲಿತ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಪದವಿದ್ದು ವಿಸ್ತಾರವು ಒಲಿತ+ಲಿಖಿತ+ಲಿಖಿತ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಮತ್ತು....

-೧ಲಿಖಿತ+೧ಲಿಖಿತ ಇದರಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದದ ಅರ್ಧ ಒಲಿತ, ಇದಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ವರ್ಗಮೂಲ ಒಕೆ ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ಲಿಖಿತ, ಇದರ ವರ್ಗ ಒಲಿತ ಇದು ಮೊದಲನೇಯ ಪದವು ಇದ್ದು ವಿಸ್ತಾರವು ಒಲಿತ-೧ಲಿಖಿತ+೧ಲಿಖಿತ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಇನ್ನು ನಮಗೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹವೊಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರಬೇಕು.

ಉ. ೧. ಒಲಿತ ಯಿ—ಒಲಿತ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

ಒಲಿತ ಯಿ = (ಒಲಿತ)^೨, ಮತ್ತು ಒಲಿತಯಿ = ೨.ಒಲಿತ.ಯಿ.

∴ (ಯಿ)^೨, ೨.ಯಿ ಯಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು.

ಒಲಿತಯಿ—ಒಲಿತಯಿ + ಯಿ ಯಿ ಇದು ಒಲಿತ—ಯಿ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೨. ಲಿಖಿತ + ಲಿಖಿತ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

ಲಿಖಿತ = (ಲಿಖಿತ)^೨, ಮತ್ತು ಲಿಖಿತ = (ಲಿಖಿತ)^೨

∴ ೨.ಲಿಖಿತ.ಲಿಖಿತ, ೨.ಲಿಖಿತಯಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು ?

ಲಿಖಿತ + ೨ಲಿಖಿತಯಿ + ಲಿಖಿತ ಇದು ಲಿಖಿತ + ಲಿಖಿತ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

... ಲಿಖಿತ + ಲಿಖಿತ

= ... + ೨.ಒಲಿತ.ಒಲಿತ +

(ಒಲಿತ)^೨

=(ಒಲಿತ)^೨ + ೨.ಒಲಿತ.ಒಲಿತ +

(ಒಲಿತ)^೨

=(ಒಲಿತ + ಒಲಿತ)^೨

... — ೧ಲಿಖಿತ + ೧ಲಿಖಿತ

= ... - ೨.ಲಿಖಿತ.ಒಲಿತ + (ಒಲಿತ)^೨

=(ಒಲಿತ)^೨ - ೨.ಲಿಖಿತ.ಒಲಿತ +

(ಒಲಿತ)^೨

=(ಒಲಿತ - ಒಲಿತ)^೨

ಉ. ೩. ೧೩೧ನೂ + ೬೪ಮೂ ಇದರೊಳಗಿಂದ ಏನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು? ೧೩೧ನೂ = (೧೧೧ನೂ) ಮತ್ತು ೬೪ಮೂ = (೮ಮೂ)². ∴ ೧೧೧ನೂ - ೮ಮೂ = ೧೦೩ನೂ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು. ೧೩೧ನೂ - ೧೦೩ನೂ + ೬೪ಮೂ ಇದು ೧೧೧ನೂ - ೮ಮೂ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು.

ಉ. ೪. ೪೫ಯೂ + ೫೬ಯೂ ಇದರಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.

೪೫ ಯೂ = (೬ಯೂ)², ಮತ್ತು ೫೬ಯೂ = ೨.೬ಯೂ. ೪.

∴ (೪)², ೨೦. ೧೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವದು.

೪೫ ಯೂ + ೫೬ ಯೂ + ೧೬ ಇದು ೬ಯೂ + ೪ ರ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ.

ಉ. ೫. ೨೫ಯೂ ಒಂಕಯೂ + ೨೬ಕೂ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟುಕೂ ಗಳಿಸು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿರುವದು?

೨೫ಯೂ = (೫ ಯೂ)², ಮತ್ತು ಒಂಕಯೂ = ೨.೬ಕ. ೫ಯೂ.

∴ ೨೫ಯೂ - ಒಂಕಯೂ ದ ಜೊತೆಗೆ (೬ಕ)², ೨೦, ೩೬ಕೂ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಮೂಲರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೬ಕ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವದು.

೨೫ಯೂ - ಒಂಕಯೂ + ೩೬ಕೂ ಇದು ೫ಯೂ - ೬ಕ ದ ವರ್ಗವಿರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨.

[ಇದರಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಜಡಿಸಲು ಬರುವವು.]

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಗೆ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ಯಾವದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗವಾಗುವವು ಇದನ್ನು ಹೇಳಿ ಅದು ಯಾವ ದ್ವಿಪದಿಯ ವರ್ಗವಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ೧೦೦ರೂ + ೬೦ರೂ.

೨. ೧೪೪ನೂ - ೧೬೮ನೂ.

೩. ೧೬೯ನೂ - ೧೦೨ಕನೂ.

೪. ೧೨೬ನೂ - ೮೪ಕನೂ.

೫. ೪೫ನೂ + ೨೦ಕನೂ + ೨೦.

೬. ೧೫ನೂ - ೧೨ಕನೂ - ೫.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಿರುವುದು. ಅದರಲ್ಲಿ ಕೂಡಲೇ ಇದ್ದ ಪದವನ್ನು ಹೇಳಿ ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೭ + ೩೦ಪಮ + ೨೫ಮೌ.

೮. + ೬೦ಪಮ + ೪೦ಮೌ.

೯. ೪೯ಯೌ + + ೧೦೦ರೌ.

೧೦. ೬೪ಯೌ + + ೧೬೦.

೧೧. ೮೧ಯೌ + + ೨೨೫.

೧೨. ೪೯ — + ೬೪ಕೌ.

೧೩. ೪೯ಯೌ — + ೯೦೦.

೧೪. ೪ ಅೌಕೌ — + ೯೬೦.

೧೫. ೧೬ಅೌಕೌ — + ೨೫೦೦ ಘೌ.

೧೬. ೮೧ — + ೪೯ಅೌಕೌ ಗೌ.

೧೭ ನಡುವಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ಏನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ೨೫೦೦ + ೧೦೦ + ೪ ಮತ್ತು ೧೬ಯೌ—೨೬ಯ+೯ ಈ ರಾಶಿಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವವು, ಆ ನಂತರ ಅವು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಾಗುವವು ?

೧೮ ನಡುವಿನ ಪದವೊಳಗಿಂದ ಯಾವುದನ್ನು ಕಳೆದರೆ ೯೦೦ + ೨೧೦೦೦೦ + ೪ ರೌ ಈ ರಾಶಿಯು ಪೂರ್ಣವಾಗುವುದು, ಆ ನಂತರ ಅದು ಯಾವುದರ ವರ್ಗವಾಗುವುದು ?

೨.

(ಪ + ಬ + ಮ)^೨ ≡ ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ

೧೦. ೫. ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಭಾ.೩.ಪು.೩೩, ೩೪) ಪ + ಬ + ಮ ದಂತಹ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಮಗ್ಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ + ಬ + ಮ ವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಪ + ಬ + ಮ ಎಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ದ್ವಿಪದವರ್ಗವಿಸ್ತಾರಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವರ್ಗವು ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ನೂರೂ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಜೋಡು ಅಧಿಕ ಅ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಯೆ ಅಂತೆ ತೋರಿಸುವ.

ಪ+ಬ ದ ನಿರ್ವಹವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಮಾಡುವೆ.

$$(ಪ+ಬ+ಮ)^೨ = (ಅ+ಮ)^೨$$

$$= ಅ^೨ + ೨ಅಮ + ಮ^೨$$

$$= (ಪ+ಬ)^೨ + ೨ಮ(ಪ+ಬ) + ಮ^೨$$

[ಅ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮೂಲ ಪ+ಬ ಬರೆದು]

$$= ಪ^೨ + ೨ಪಬ + ಬ^೨ + ೨ಪಮ + ೨ಬಮ + ಮ^೨$$

$$= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ಪಬ + ೨ಬಮ + ೨ಮಪ$$

ಬದಿಯಲ್ಲಿಯು ಆಕೃತಿ ಮೇಲಿಂದಲೂ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ಈ ವಿಸ್ತಾರ-ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಹಿಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದೆ. ಇಂದು ನಾವು ಅವುಗಳ ಉಜ್ಜೇಯನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

	ಪ	ಬ	ಮ	
ಮ		ಪ ಬ	ಪ ಮ	೩.
ಪ ಬ		ಬ	ಬ ಮ	
ಪ ಮ		ಬ ಮ	ಮ	೩.

ಆಕೃತಿ ೩.

ಉ. ೧. $(ಪ-ಬ-ಮ)^೨ = ಪ^೨ + (-ಬ)^೨ + (-ಮ)^೨ + ೨ಪ(-ಬ) + ೨ಪ(-ಮ) + ೨(-ಬ)(-ಮ)$
 $= ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೨ಪಬ + ೨ಪಮ - ೨ಮಬ.$

ಉ. ೨. $(೨ಕ-೨ಗ+೬ಘ)^೨ = (೨ಕ)^೨ + (-೨ಗ)^೨ + (೬ಘ)^೨ + ೨.೨ಕ(-೨ಗ) + ೨.೨ಕ. ೬ಘ +$

$$\begin{aligned} & ೨(-೨ಗ).೬ಘ \\ & = ೨೫ಕೃ + ೪ಗ + ೬೬ಘ - ೨೦ಕಗ + ೬೦ಕಘ - ೨೪ಗಘ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೩.} \quad & (೨ಪ - ೨ಬ - ೩ಮ)^೨ \\ & = (೨ಪ)^೨ + (-೨ಬ)^೨ + (-೩ಮ)^೨ + ೨.೨ಪ \\ & \quad (-೨ಬ) + ೨.೨ಪ(-೩ಮ) + ೨(-೨ಬ)(-೩ಮ) \\ & = ೪ಪಪ + ೪ಬಬ + ೯ಮಮ - ೪ಪಬ - ೧೨ಪಮ + ೬ಬಮ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪.} \quad & (೨ಯ + ೨ರ - ೫ಲ)^೨ = (೨ಯ)^೨ + (೨ರ)^೨ + \\ & \quad (-೫ಲ)^೨ + ೨.೨ಯ. ೨ರ + ೨.೨ಯ(-೫ಲ) + \\ & \quad ೨೨ರ(-೫ಲ) \\ & = ೪ಯಯ + ೪ರರ + ೨೫ಲಲ + ೪ಯ೨ರ - \\ & \quad ೨೦ಯಲ - ೧೦ರಲ. \end{aligned}$$

ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೇ ತ್ರಿಪದಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು
ಸಡುವಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೫.} \quad & ಯ = ೩, ರ = ೨, ಲ = ೫ ಇದ್ದರೆ ೯ಯ + ೪ರ + ೪ಲ - \\ & \quad - ೪೨ಯರ - ೨೨ರಲ + ೧೨ಲಯ = ? \\ & ೯ಯ + ೪ರ + ೪ಲ - ೪೨ಯರ - ೨೦ರಲ + ೧೨ಲಯ \\ & = (೩ಯ)^೨ + (-೨ರ)^೨ + (೨ಲ)^೨ + ೨.೩ಯ(-೨ರ) \\ & \quad + ೨.೨ಲ(-೨ರ) + ೨.೨ಲ.೩ಯ \\ & = (೩ಯ - ೨ರ + ೨ಲ)^೨ \\ & = (೯ - ೧೪ + ೧೦)^೨ \\ & = (೫)^೨ \\ & = ೨೫. \end{aligned}$$

ಉ. ೬. $(ಪ+ಬ)^೪$ ದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ
 $(ಪ+ಬ)^೪ = \{(ಪ+ಬ)^೩\}^೨$
 $= (ಪ^೩+೩ಪಬ+ಬ^೩)^೨$
 $= (ಪ^೩)^೨ + (೩ಪಬ)^೨ + (ಬ^೩)^೨ + ೨ಪ^೩ \cdot ೩ಪಬ +$
 $೨ಪ^೩ಬ^೩ + ೨೩ಪಬ \cdot ಬ^೩$
 $= ಪ^೬+೪ಪ^೪ಬ+೬ಪ^೩ಬ^೨+೪ಪ^೨ಬ^೩+೩ಪಬ^೪+ಬ^೬$
 $= ಪ^೬+೪ಪ^೪ಬ+೬ಪ^೩ಬ^೨+೪ಪ^೨ಬ^೩+ಬ^೬.$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩.

(ಮೊದಲಿನ ಬಳಕೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವವು.)
 ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

- | | |
|---------------|----------------|
| ೧. ೬ತ-೬-೩. | ೨. ಯ-೪ರ+೩ಲ. |
| ೩. ಲಯ+೩ರ+೨ಲ. | ೪. ಖಕ-೨ಗ+೫ಫ. |
| ೫. ಖಪ-೨ಬ-೫. | ೬. ೨ಯ-೩ರ+೨ಲ. |
| ೭. ಖಕ+೨ಗ-೬ಫ. | ೮. ೨ತ-೧೦ದ-೨ನ. |
| ೯. ಖಕ-೩ಗ-೫ಫ. | ೧೦. ಕ-೨ಕಗ+೩ಗ. |
| ೧೧. ಯ-೨ಯ-೫ಯ. | ೧೨. ೨ಯ-೬ಯರ+೨ರ. |
| ೧೩. ಖತ-೬ತ-೨. | ೧೪. ೩ಪ-೫-೩ಪ. |
| ೧೫. ೨ಕ-೩ಗ-೫ಫ. | ೧೬. ೫ರ-೪ಲ+೨ಯ. |
| ೧೭. ೩ಪ+೫ನ-೫ತ. | ೧೮. ೪ಕ-೧೦ದ-೫ನ. |
| | ೧೯. ೫ದ-೩ನ-೨ತ. |

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ

೧೦. ೯ಪ+೪ಬ+೨ಮ-೧೨ಪಬ-೨ಬಮ+೨ಮಪ.
 ೧೧. ೪ಕ+೧೬ಕ+೪ಕ-೨೪ಕ+೯.
 ೨೦. ೧೬ಯ-೨೪ಯರ+೪೫ಯರ ೩೦ಯರ+೨೫ರ.

ತೆರವಿದ್ದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

೨೧. $(\text{ಅಯು} \dots + \text{ಇಲಿ})^3 = \dots \dots \dots - \text{ಗಿತ್ತಯರ} \dots \dots$
 ೨೨. $(\dots - \text{ಬಿರ} \dots)^3 = \dots \dots \dots - \text{ಅತ್ತಯರ} \dots - \text{ಬಿಲಯ} \dots$
 ೨೩. $(\text{ಇಪ} \dots \dots)^3 = \dots \dots \dots + \text{ಗಿತ್ತಬಮ} \text{ ಅಮಮ}.$
 ೨೪. $(\dots - \text{ಅಗ} \dots)^3 = \dots - \text{ಅಲಕಗ} \dots + \text{ಇಲಕ} \dots \dots$
 ೨೫. $\text{ಯ}=\text{ಇ}, \text{ರ}=\text{ಬಿ}, \text{ಲ}=-\text{ಗಿ}$ ಇದ್ದರೆ $\text{ಯು} + \text{ಅರ} + \text{ಲ} - \text{ಅಯರ}$
 $- \text{ಅರಲ} + \text{ಅಲಯ} = ?$
 ೨೬. $\text{ಪ}=\text{ಇ}, \text{ಬ}=\text{ರ}, \text{ಮ}=\text{ಗಿ}$ ಇದ್ದರೆ $\text{ಅಪ} + \text{ಅಬ} + \text{ಗಿಮ}$
 $- \text{ಅಪಬ} + \text{ಅಬಮ} - \text{ಗಿಮಪ} = ?$
 ೨೭. $\text{ತ}=\text{ಕ್ತಿ}$ ಇದ್ದರೆ $\text{ತ} - \text{ಅತ} + \text{ತ} - \frac{\text{ಕ್ತಿ}}{\text{ಕ್ತಿ}} + \frac{\text{ಕ್ತಿ}}{\text{ಕ್ತಿ}} = ?$

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೨೮. $(\text{ತ}-\text{ಕ್ತಿ. ದ})^3$, ೨೯. $(\text{ಇನ} + \text{ಅಮ})^3$.
 ೩೦. $(\text{ಯ} - \frac{\text{ಕ್ತಿ}}{\text{ಯ}})^3$.

೧.೬. $\therefore (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^3$

$\equiv \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮ}^3 + 3\text{ಪಬ} + 3\text{ಬಮ} + 3\text{ಮಪ}$

$\equiv \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮ}^3 + 3(\text{ಪಬ} + \text{ಬಮ} + \text{ಮಪ})$

$\therefore \text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮ}^3 \equiv (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^3$

$- 3(\text{ಪಬ} + \text{ಬಮ} + \text{ಮಪ})$ ಮತ್ತು $3(\text{ಪಬ} + \text{ಬಮ} + \text{ಮಪ})$

$\equiv (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^3 - (\text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮ}^3)$ ಕಂಡಿರೆಯೇ

$\text{ಪಬ} + \text{ಬಮ} + \text{ಮಪ}$

$\equiv \frac{1}{3} \{ (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ})^3 - (\text{ಪ}^3 + \text{ಬ}^3 + \text{ಮ}^3) \}$

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಯ + ರ + ಲ = ೫, ಮತ್ತು ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ೮
 ಇದ್ದರೆ ಯ + ರ + ಲ = ?
 ಯ + ರ + ಲ = (ಯ + ರ + ಲ)^೨
 = ೨ (ಯರ + ರಲ + ಲಯ)
 = (೫)^೨ - ೨.೮
 = ೨೫ - ೧೬
 = ೯.

ಉ. ೨. ಕ + ಗ + ಘ = ೬ ಮತ್ತು ಕು + ಗು + ಘು = ೩೮
 ಇದ್ದರೆ ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ = ?
 ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ
 = ೨ { (ಕ + ಗ + ಘ)^೨ - (ಕು + ಗು + ಘು) }
 = ೨ (೩೬ - ೩೮)
 = ೨ (-೨)
 = -೪.

ಉ. ೩. (ಯ - ರ)^೨ + (ರ - ವ)^೨ + (ವ - ಯ)^೨ +
 ೨(ಯ - ರ)(ರ - ವ) + ೨(ರ - ವ)(ವ - ಯ)
 + ೨(ವ - ಯ)(ಯ - ರ) ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು
 ಕೊಡಲಿ.

ಯ - ರ, ರ - ವ, ಮತ್ತು ವ - ಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
 ಪ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು
 = ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ + ೨ ಪಬ + ೨ ಬಮ + ೨ ಮಪ
 = (ಪ + ಬ + ಮ)^೨
 = (ಯ - ರ + ರ - ವ + ವ - ಯ)^೨
 = ೦.

ಈ ಉಪಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೇ
 ಸಹ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಈ ಹಂತವನ್ನು ನಾವು
 ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉ. ೪. ಯ = ಕ + ಗ — ಅ, ರ = ಗ + ಅ — ಕ, ಸ = ಅ + ಕ —
ಇದ್ದರೆ ಯ^೨ + ರ^೨ + ಸ^೨ + ೨ಯರ + ೨ರಸ + ೨ಸಯ
= ಅ^೨ + ಕ^೨ + ಗ^೨ + ೨ಅಕ + ೨ಕಗ + ೨ಗಅ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.
ಯ^೨ + ರ^೨ + ಸ^೨ + ೨ಯರ + ೨ರಸ + ೨ಸಯ

$$= (ಯ + ರ + ಸ)^೨$$

$$= (ಕ + ಗ — ಅ + ಗ + ಅ — ಕ + ಅ + ಕ — ಗ)^೨$$

$$= (ಅ + ಕ + ಗ)^೨$$

$$= ಅ^೨ + ಕ^೨ + ಗ^೨ + ೨ಅಕ + ೨ಕಗ + ೨ಗಅ.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪.

೧. ಕ + ಗ + ಘ = ೮, ಮತ್ತು ಕ^೨ + ಗ^೨ + ಘ^೨ = ೩೦

ಇದ್ದರೆ ಕಗ + ಗಘ + ಘಕ = ?

೨. ತ + ದ + ನ = ೦, ತದ + ದನ + ನತ = — ೧೯

ಇದ್ದರೆ ತ^೨ + ದ^೨ + ನ^೨ = ?

೩. ಪ — ಬ + ಮ = ೬ ಮತ್ತು ಪಬ + ಬಮ — ಮಪ + ೧೧ = ೦

ಇದ್ದರೆ ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ = ?

೪. ಅ + ಕ = ಗ + ೧ ಮತ್ತು ಗ(ಅ + ಕ) = ಅಕ + ೨೨

ಇದ್ದರೆ ಅ^೨ + ಕ^೨ + ಗ^೨ = ?

೫. ೨(ಯ + ರ + ಲ + ೧) = ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨ = ೧೪

ಇದ್ದರೆ ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ?

೬. ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨ = — ೪ ಮತ್ತು ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨ = ೧೪

ಇದ್ದರೆ ಯರ + ರಲ + ಲಯ = ?

೭. ಪ — ಬ — ಮ = ೬, ಮತ್ತು ಪಬ + ಪಮ — ಬಮ = ೩ ಇದ್ದರೆ

ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ = ?

ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೮. (ಪ — ೨ಬ)^೨ + (೨ಬ — ೩ಮ)^೨ + (೩ಮ — ೪ಪ)^೨ +

೨(ಪ—೨ಬ)(೨ಬ—೨ಮ) + ೨(೨ಬ—೨ಮ) (೨ಮ—೨ಪ) +
೨(೨ಮ—೨ಪ) (ಪ—೨ಬ).

೯. ಕ^೨ (ಗ—ಘ)^೨ + ಗ^೨ (ಘ—ಕ)^೨ + ಘ^೨ (ಕ—ಗ)^೨ +
೨ಕಗ (ಗ—ಘ) (ಘ—ಕ) + ೨ಗಘ (ಘ—ಕ) (ಕ—ಗ) +
೨ಘಕ (ಕ—ಗ) (ಗ—ಘ).

೧೦. ಹಿಂಸೆ (ಭಾ. ೨. ಪು. ೭೨) ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆಂದರೆ
ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಪದಗಳಿದ್ದರೂ ಆ ರಾಶಿಯ ವರ್ಗವು ಆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ
ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅರ್ಥಿಕ ಎರಡೆರಡು ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಇಮ್ಮಡಿಗಳ
ಬೇರೀಜು ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ+ಬ+
ಭ+ಮ ವ ವರ್ಗವನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಇದ್ದರೆ ಅವನ್ನು ಪ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+
ಮ^೨+೨ ಪಬ+೨ ಪಭ+೨ ಪಮ+೨ ಬಭ+೨ ಬಮ+೨ ಭಮ ಎಂದು
ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ
ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು.

(ಪ+ಬ+ಭ+ಮ)^೨

≡ ಪ^೨+೨ಪ (ಬ+ಭ+ಮ) + (ಬ+ಭ+ಮ)^೨

≡ ಪ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಭ+೨ಪಮ+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+
೨ ಬಭ+೨ ಬಮ+೨ ಭಮ

≡ ಪ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+೨ಪಬ+೨ಪಭ+೨ಪಮ+
೨ಬಭ+೨ಬಮ+೨ಭಮ.

ಇದರಂತೆಯೇ ಜ್ಞಾನಸೇ ಬಹುವವಿಯ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ
ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಮುಂದಿನ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು
ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದು.

(ಪ+ಬ+ಮ)^೨ ≡ ಪ^೨+ಬ^೨+ಮ^೨+೨ಪ (ಬ+ಮ)+೨ಬಮ;

(ಪ+ಬ+ಭ+ಮ)^೨

≡ ಪ^೨+ಬ^೨+ಭ^೨+ಮ^೨+೨ಪ (ಬ+ಭ+ಮ) +
೨ಬ (ಭ+ಮ)+೨ಭಮ;

(ಪ+ಫ+ಬ+ಭ+ಮ)^೨ ≡ ಪ^೨ + ಫ^೨ + ಬ^೨ + ಭ^೨ + ಮ^೨ +
 ೨ಪ(ಫ+ಬ+ಭ+ಮ) + ೨ಫ(ಬ+ಭ+ಮ) +
 ೨ಬ(ಭ+ಮ) + ೨ಭಮ.

ಉ. ೧. ೨ಯ—೩ರ—೪ + ೫ಸ ದ ವರ್ಗದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.
 (೨ಯ—೩ರ—೪ + ೫ಸ)^೨

= (೨ಯ)^೨ + (—೩ರ)^೨ + (—೪)^೨ + (೫ಸ)^೨ + ೨.೨ಯ(—೩ರ)
 + ೨.೨ಯ(—೪) + ೨.೨ಯ೫ಸ + ೨(—೩ರ)(—೪)
 + ೨(—೩ರ).೫ಸ + ೨(—೪).೫ಸ

= ೪ಯ^೨ + ೯ರ^೨ + ೧೬ + ೨೫ಸ^೨ — ೧೨ಯರ — ೪ಯ೪ +
 ೨೦ಯಸ + ೬ರ೪ + ೩೦ರಸ + ೧೦೪ಸ.

* ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಾಕಷ್ಟು ರೂಢಿಯು
 ಆದಮೇಲೆ ಈ ನಡುವಿನ ಹಂತದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ.

ಉ. ೨. (ಪ+ಮ)^೩ ದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(ಪ+ಮ)^೩ = { (ಪ+ಮ)^೨ }^೨
 = (ಪ^೨ + ೨ಪಮ + ಮ^೨ + ಮ^೨)^೨
 = ಪ^೪ + ೪ಪ^೩ಮ + ೬ಪ^೨ಮ^೨ + ಮ^೪ + ೬ಪಮ^೩ +
 ೬ಪ^೨ಮ^೨ + ೨ಪಮ^೩ + ೧೨ಪ^೨ಮ^೨ + ೬ಪಮ^೩ + ೬ಪಮ^೩
 = ಪ^೪ + ೬ಪಮ^೩ + ೧೨ಪಮ^೨ + ೨೦ಪಮ^೨ +
 ೧೨ಪಮ^೨ + ೬ಪಮ^೩ + ಮ^೪.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :

೧. ತ—ದ+ಧ+ನ. ೨. ೩ಪ—೪ಬ—ಭ—ಮ.
 ೩. ೨ಪ—೨ಫ—೪ಮ+೪ಫ. ೪. ೫ಯ—೬ರ+೩ಲ—೧.

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ:-

೫. (ಪ—ಮ)^೩. ೬. (೨ಯ+೩ರ)^೩. ೭. (ತ—೩ನ)^೩
 ೮. (೩ಯ—೨ಫ)^೩. ೯. (೨ರ—೩ಸ)^೩

೩.

(ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ)≡ಪ-ಮ

೧.೮. ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾಗ ೧, ಪು. ೧೯೯) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರಿನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದರೇಯೇ (ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ)≡ಪ-ಮ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದೇ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಆಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಭಾ. ೨, ಪು. ೮೦-೮೪ ರಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದೇ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಉಳಿಕೆಗಳಾಗಿ ಇಂದು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವೆ.

ಉ. ೧. ತ+ದ+೨ನ ಮತ್ತು ೨ನ-ತ-ದ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ಚಿಹ್ನೆವಿರುವ ಎರಡು ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಗುಂಪಿನ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಪ ಈ ಆದೇಶದಿಂದ ಮಾಡಿ, ಇಷ್ಟು ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{aligned}
 & (ತ+ದ+೨ನ)(೨ನ-ತ-ದ) \\
 & = \{೨ನ+(ತ+ದ)\} \{೨ನ-(ತ+ದ)\} \\
 & = (೨ನ+ಪ)(೨ನ-ಪ) * \\
 & = (೨ನ)^೨-(ಪ)^೨ * \\
 & = ೪ನ^೨-(ತ+ದ)^೨ [ಪ ದ ಬದಲಾಗಿ ತ+ದ ಬರೆದು] \\
 & = ೪ನ^೨-(ತ^೨+೨ತದ+ದ^೨) \\
 & = ೪ನ^೨-ತ^೨-೨ತದ-ದ^೨.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ೫ಯ-೭ರ+೩ಸ ಮತ್ತು ೫ಯ+೭ರ-೩ಸ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ, ೫ಯ, ದ ಹಿಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆವು ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಇದ್ದು ೭ರ ಮತ್ತು ೩ಸ ಇವುಗಳ ಹಿಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಭಿನ್ನ ಆಂ. ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ - ಮತ್ತು + ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇದರ ವಿರುದ್ಧ ಆಂ. + ಮತ್ತು - ಇದ್ದುದರಿಂದ,

೭ರ-೩ಸ ಇದೊಂದು ಗುಂಪು ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು ಮುಂದೆ ಮಾಡಿ, ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

$$\begin{aligned}
 & (೫ಯ-೭ರ+೩ಸ)(೫ಯ+೭ರ-೩ಸ) \\
 & = \{೫ಯ-(೭ರ-೩ಸ)\} \{೫ಯ+(೭ರ-೩ಸ)\} \\
 & = (೫ಯ-ಮ)(೫ಯ+ಮ) * \\
 & = (೫ಯ)^೨-ಮ^೨ * \\
 & = ೨೫ಯ^೨-(೭ರ-೩ಸ)^೨ [\because ಮ = ೭ರ-೩ಸ] \\
 & = ೨೫ಯ^೨-(೪೯ರ^೨-೪೨ರಸ+೯ಸ^೨) \\
 & = ೨೫ಯ^೨-೪೯ರ^೨+೪೨ರಸ-೯ಸ^೨.
 \end{aligned}$$

ಉ.೩ ೨ಯ-೪ರ-೩ಲ+೫ಸ ಮತ್ತು ೨ಯ+೪ರ-೩ಲ-೫ಸ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವೇ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿರುವ ೨ಯ ಮತ್ತು ೩ಲ ಈ ಪದಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪು ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳಿರುವ ೪ರ ಮತ್ತು ೫ಸ ಈ ಪದಗಳ ಎರಡನೇ ಗುಂಪನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನ ಬದಲಾಗಿ ೨ಯ-೩ಲ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಬದಲಾಗಿ ೨ಯ-೪ರ-೫ಸ, ಬದಲಾಗಿ ಮ ಎಂದು ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಯೋಜಿಸಿದರೆ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

$$\begin{aligned}
 & \text{ಗುಣಾಕಾರವು} = \\
 & \{(೨ಯ-೩ಲ)-(೪ರ-೫ಸ)\} \{(೨ಯ-೩ಲ)+(೪ರ-೫ಸ)\} \\
 & = (ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ) * \\
 & = ಪ^೨-ಮ^೨ * \\
 & = (೨ಯ-೩ಲ)^೨-(೪ರ-೫ಸ)^೨ \\
 & = (೪ಯ^೨-೧೨ಯಲ+೯ಲ^೨)-(೧೬ರ^೨-೪೦ರಸ+೨೫ಸ^೨) \\
 & = ೪ಯ^೨-೧೨ಯಲ+೯ಲ^೨-೧೬ರ^೨+೪೦ರಸ-೨೫ಸ^೨.
 \end{aligned}$$

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಬಹುದು.

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}) (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ} - \text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 & (-\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}). \\
 & (\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}) (\text{ಪ} + \text{ಬ} - \text{ಮ}) (\text{ಪ} - \text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 & (-\text{ಪ} + \text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 & \equiv \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮ}\} \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) - \text{ಮ}\} \{\text{ಮ} + (\text{ಪ} - \text{ಬ})\} \\
 & \quad \{\text{ಮ} - (\text{ಪ} - \text{ಬ})\} \\
 & \equiv \{(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮ}\} \{\text{ಮ} - (\text{ಪ} - \text{ಬ})\} \\
 & \equiv (\text{ಪ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಬಮ} - \text{ಮಮ}) (\text{ಮಮ} - \text{ಪಮ} + \text{ಅಪಮ} - \text{ಬಮ}) \\
 & \equiv \{\text{ಅಪಮ} + (\text{ಪಮ} + \text{ಬಮ} - \text{ಮಮ})\} \{\text{ಅಪಮ} - (\text{ಪಮ} + \text{ಬಮ} - \text{ಮಮ})\} \\
 & \equiv (\text{ಅಪಮ})^2 - (\text{ಪಮ} + \text{ಬಮ} - \text{ಮಮ})^2 \\
 & \equiv \text{ಅಪಮಮಮ} - (\text{ಪಮ} + \text{ಬಮ} + \text{ಮಮ} + \text{ಅಪಮಮ} - \text{ಬಮಮಮ} - \text{ಪಮಮಮ} - \text{ಅಪಮಮಮ}) \\
 & \equiv \text{ಅಪಮಮಮ} + \text{ಅಪಮಮಮ} + \text{ಅಪಮಮಮ} - \text{ಪಮ} - \text{ಬಮ} - \text{ಮಮ}.
 \end{aligned}$$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮವ ಉಪಯೋಗವು ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಸಲ ಅಗುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದ ತದನ್ನು ತದರ್ಥವಾಗಿ ಅಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ಇಡತಕ್ಕದ್ದು.

ಉ. ೫. ೬೦೨ ಕ್ಕೆ ೫೦೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & ೬೦೨ \times ೫೦೨ \\
 & = (೬೦೦ - ೧೨) (೬೦೦ - ೧೨) \\
 & = (೬೦೦)^2 - (೧೨)^2 \\
 & = ೩೬೦೦೦೦ - ೧೪೪ \\
 & = ೩೫೯೮೫೬.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೬. ಪಮ + ಅಪಮ + ಅಮಮ ಮತ್ತು ಪಮ - ಅಪಮ + ಅಮಮ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & (\text{ಪಮ} + \text{ಅಪಮ} + \text{ಅಮಮ}) (\text{ಪಮ} - \text{ಅಪಮ} + \text{ಅಮಮ}) \\
 & = \{(\text{ಪಮ} + \text{ಅಮಮ}) + \text{ಅಪಮ}\} \{(\text{ಪಮ} + \text{ಅಮಮ}) - \text{ಅಪಮ}\}
 \end{aligned}$$

$$=(ಪ+ಅಮ)^೨-(ಅಮ)^೨$$

$$=ಪ+ಅಮ+೧೬ಮ-ಅಮ$$

$$=ಪ+ಅಮ+೧೬ಮ.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ಅಯ+೮-೫೮, ಅಯ-೮+೫೮.
೨. ಅಪ-೩ಬ-೨ಮ, ೩ಬ-೨ಮ-ಅಪ.
೩. ೯ಕ+೨ಗ-೬ಘ, ೨ಗ-೬ಘ-೯ಕ.
೪. ೨ಕ-೫ಗ+೩, ೨ಕ+೫ಗ-೩.
೫. ಅ+೧+ $\frac{೧}{೮}$, ಅ-೧+ $\frac{೧}{೮}$.
೬. ೫ಲಿ-೩ಲಸ+ಅಸ, ೫ಲಿ+೩ಲಸ+ಅಸ.
೭. ಅಪ+೨ಬ-೭ಭ-೩ಮ, ಅಪ-೨ಬ+೭ಭ-೩ಮ.
೮. ೨ತ+೫ದ-೬ಧ+೩ನ, ೨ತ-೫ದ-೬ಧ+೩ನ.
೯. ಅ+ಅ+೧, ಅ-ಅ+೧, ಅ+ಅ+೧.
೧೦. ೧+ಅಪ+ಅಪ, ೧-ಅಪ+ಅಪ, ೧-ಅಪ+೧೬ಪ.
೧೧. ೧೬ಯ+೮, ೨ಯ+೨ಯ+೨೮, ೨ಯ-೨ಯ+೮, ೨ಯ+೮, ೨ಯ-೮.

ಬಿಡಿಸಿರಿ:

೧೨. ೮೬ X ೧೧೪. ೧೩. ೭೭೫ X ೮೭೫. ೧೪. ೩೯ X ೪೧ X ೧೬೦೧.

೪.

(ಪ±ಮ)^೨≡ಪ^೨±ಮ^೨±೨ಪಮ(ಪ±ಮ)

೧೦೯. ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ (ಭಾ. ೨. ಪು. ೬೪, ೬೬) ಯಾವದೇ ದ್ವಿಸದದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ವಿಶಿಷ್ಟ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬೇಗನೆ ಬಿಡಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಹೇಗಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ಅದರ ಮುಂದಿನ

ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ (ಪು. ೮೫-೮೯) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಅರ್ಥ ಸಂಗತಿಯ ತಿರುಗಿ ಉಪಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಆ ವಿಷಯದ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಮುಂದೆ ಮಾಡುವಾ.

ನಮಗೆ ಪ+ಬ+ಮು ದಂತದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಸದಿಯ ಭಾವದ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಮಗೆ ಅದನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಬರೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಪ+ಬ ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ಆ ಈ ಆದೇಶವನ್ನು ಇಟ್ಟರೆ,

$$\begin{aligned}
 & (ಪ+ಬ+ಮು)^3 = (ಅ+ಮ)^3 \\
 & = ಅ^3 + ಮ^3 + ೩ಅಮ + ೩ಅಮ^2 \\
 & = (ಪ+ಬ)^3 + ಮ^3 + ೩(ಪ+ಬ)^2ಮ + ೩(ಪ+ಬ)ಮ^2 \quad \because ಅ=ಪ+ಬ \\
 & = ಪ^3 + ಬ^3 + ೩ಪಬ(ಪ+ಬ) + ಮ^3 + ೩(ಪ^2 + ಬ^2 + ೨ಪಬ)ಮ + \\
 & \quad + ೩(ಪ+ಬ)ಮ^2 \\
 & = ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 + ೩ಪಬ(ಪ+ಬ) + ೩(ಪ^2 + ಬ^2)ಮ + ೬ಪಬಮ \\
 & \quad + ೩(ಪ+ಬ)ಮ^2 \\
 & = ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 + ೩ಪ^2ಬ + ೩ಪಬ^2 + ೩ಮಪ^2 + ೩ಬಮ^2 + \\
 & \quad + ೬ಪಬಮ + ೩ಮ^2ಪ + ೩ಬಮ^2 \\
 & = ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 + ೩ಪ^2ಬ + ೩ಪಬ^2 + ೩ಬಮ^2 + ೩ಬಮ^2 + \\
 & \quad + ೩ಮ^2ಪ + ೩ಮಪ^2 + ೬ಪಬಮ.
 \end{aligned}$$

ಇದೇ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 + ೩ಪಬ (ಪ+ಬ) + ೩ಬಮ (ಬ+ಮ) + ೩ಮಪ (ಮ+ಪ) + ೬ಪಬಮ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 + ೩ಪ^2 (ಬ+ಮ) + ೩ಬ^2 (ಮ+ಪ) + ೩ಮ^2 (ಪ+ಬ) + ೬ಪಬಮ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪ^3 + ಬ^3 + ಮ^3 + ೩(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 & (ಪ+ಬ+ಮ)^3 \\
 & = \{(ಪ+ಬ)+ಮ\}^3 \\
 & = (ಪ+ಬ)^3 + ಮ^3 + ೩ಮ(ಪ+ಬ)(ಪ+ಬ+ಮ)
 \end{aligned}$$

- \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ೩.ಪಬ(ಪ + ಬ) + ಮ^೩ + ೩.ಮ(ಪ + ಬ)(ಪ + ಬ + ಮ)
 \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ + ೩.(ಪ + ಬ) {ಪಬ + ಮ(ಪ + ಬ + ಮ)}
 \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ + ೩.(ಪ + ಬ) {೩(ಬ + ಮ) + ಮ(ಬ + ಮ)}
 \equiv ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ + ೩(ಪ + ಬ) ಬ + ಮ(ಮ + ಪ).

ಶ್ರೀಪದದ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರದ ಈ ನಾಲ್ಕೂ ರೂಪಗಳು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವುದು ಇಷ್ಟವಾದುದು.

$$೧.೧೦. (ಪ + ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ + ಮ^೩ + ೩ಪಮ(ಪ + ಮ)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (ಪ - ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ - ಮ^೩ - ೩ಪಮ(ಪ - ಮ)$$

ಈ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ ನಮಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ^೩ + ಮ^೩ \equiv (ಪ + ಮ)^೩ - ೩ಪಮ(ಪ + ಮ) ಮತ್ತು ಪ^೩ - ಮ^೩ \equiv (ಪ - ಮ)^೩ + ೩ಪಮ(ಪ - ಮ) ಈ ನಿತ್ಯಸಮಗಳು ದೊರೆಯುವವು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಅಗಾಗ್ಗೆ ಆಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು.

೧.೧೧. ಮೂರರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿರುವ ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಘನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು (ಪ + ಮ)^೩ ದ ಇಲ್ಲವೇ (ಪ + ಬ + ಮ)^೩ ದ ವಿಸ್ತಾರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಮಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಒರೆಯಲು ಬರುವುದು. ಇದರ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಹಿಂದೆ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದೇ ಇದೆ.

$$\text{ಈಗ } (ಪ \pm ಮ)^೩ \equiv ಪ^೩ \pm ಮ^೩ \pm ೩ಪಮ(ಪ \pm ಮ)$$

ಈ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಬೇರೆ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 ೧೧. ೧. (ಯ + ರ)^೩ &= ೩.(ಯ + ರ)^೨(ಯ - ರ) + ೩.(ಯ + ರ)(ಯ - ರ)^೨ \\
 &- (ಯ - ರ)^೩ \text{ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.}
 \end{aligned}$$

ಯ + ರ ಮತ್ತು ಯ - ರ ಗಳ ನಿರ್ಣೇಶವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ರಾಶಿಯು \equiv ಪ^೩ - ೩ಪ^೨ಮ + ೩ಪಮ^೨ - ಮ^೩ *

$$= (ಪ-ಮ)^2 *$$

$$= \{(ಯ+ರ)-(ಯ-ರ)\}^2 \because ಪ=ಯ+ರ \text{ ಮತ್ತು } ಮ=ಯ-ರ]$$

$$= (೨ರ)^2$$

$$= ೪ರ^2.$$

ಉ. ೨. ೮ (೩ಕ-೫ಗ) + ೩೬ (೩ಕ-೫ಗ)^೨ (೩ಗ-೨ಕ)

$$+ ೫೫ (೩ಕ-೫ಗ) (೩ಗ-೨ಕ)^2 + ೨೭ (೩ಗ-೨ಕ)^3$$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೨ (೩ಕ-೫ಗ) ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ೩ (೩ಗ-೨ಕ) ದ

ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\text{ರಾಶಿಯು} = ಪ^2 + ೩ ಪ^2 ಮ + ೩ ಪ ಮ^2 + ಮ^3$$

$$= (ಪ+ಮ)^3 *$$

$$= \{೨ (೩ಕ-೫ಗ) + ೩ (೩ಗ-೨ಕ)\}^3$$

$$= (೬ಕ-೧೦ಗ+೯ಗ-೬ಕ)^3$$

$$= (-ಗ)^3$$

$$= -ಗ^3.$$

ಉ. ೩. (ಯ-ರ+ಸ)^2 - ೩ (ಯ-ರ+ಸ)^2 (ಯ+ರ+ಸ)

$$+ ೩ (ಯ-ರ+ಸ) (ಯ+ರ+ಸ)^2 - (ಯ+ರ+ಸ)^3$$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಯ-ರ+ಸ ದ ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು ಯ+ರ+ಸ ದ ಮ ದಿಂದ

ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\text{ರಾಶಿಯು} = ಪ^2 - ೩ ಪ^2 ಮ + ೩ ಪ ಮ^2 - ಮ^3 *$$

$$= (ಪ-ಮ)^3 *$$

$$= \{(ಯ-ರ+ಸ)-(ಯ+ರ+ಸ)\}^3$$

$$= (-೨ರ)^3$$

$$= -೮ರ^3.$$

* ಪ, ಮ ಈ ಆವೇಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೪. $ಯ + ರ = ೭$, ಮತ್ತು $ಯರ = ೧೨$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೩ + ರ^೩ = ?$

$$ಯ^೩ + ರ^೩ = (ಯ + ರ)^೩ - ೩ಯರ(ಯ + ರ)$$

$$= ೭^೩ - ೩ \times ೧೨ \times ೭$$

$$= ೩೪೩ - ೨೫೨$$

$$= ೯೧.$$

ಉ. ೫.

$ಪ = ೧೩೫$ ಮತ್ತು $ಮ = ೧೬೪$ ಇದ್ದರೆ

$$೧೨೫ಪ^೩ - ೩೦೦ಪ^೨ಮ + ೨೪೦ಪಮ^೨ - ೬೪ಮ^೩ = ?$$

$$೧೨೫ಪ^೩ - ೩೦೦ಪ^೨ಮ + ೨೪೦ಪಮ^೨ - ೬೪ಮ^೩$$

$$= (೫ಪ)^೩ - ೩(೫ಪ)^೨.೪ಮ + ೩.೫ಪ(೪ಮ)^೨ - (೪ಮ)^೩$$

$$= (೫ಪ - ೪ಮ)^೩$$

$$= (೫ \times ೧೩೫ - ೪ \times ೧೬೪)^೩$$

$$= (೬೬ - ೬೫)^೩$$

$$= (೧)^೩$$

$$= ೧.$$

ಉ. ೬. $ಯ - \frac{೧}{ಯ} = ೧೨$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೩ - \frac{೧}{ಯ^೩} = ?$

$$ಯ^೩ - \frac{೧}{ಯ^೩} = \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)^೩ + ೩ಯ \cdot \frac{೧}{ಯ} \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)$$

$$= \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)^೩ + ೩ \left(ಯ - \frac{೧}{ಯ} \right)$$

$$= \left(\frac{೨೩}{೨} \right)^೩ + ೩ \times \frac{೨೩}{೨}$$

$$= \frac{೨೭}{೪} + \frac{೬೯}{೨}$$

$$= ೩೬ + ೨೨$$

$$= ೫೮.$$

ಉ. ೭. $ಪ + \frac{೧}{ಪ} = ೮$ ಇದ್ದರೆ

$$ಪ^೩ + \frac{೧}{ಪ^೩} = ೮ - ೩೮೩ ಎಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಮಾಡಿರಿ.$$

$$\begin{aligned} & \text{ಪ} + \frac{\text{ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪ}} = \text{ಅ} \\ & \text{ಘನಮಾಡಿ, ಪ}^2 + \frac{\text{ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪ}} + ೨\text{ಪ}\frac{\text{ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪ}} \left(\text{ಪ} + \frac{\text{ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪ}} \right) = \text{ಅ}^2 \\ & \therefore \text{ಪ}^2 + \frac{\text{ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪ}} + ೨\text{ಅ} = \text{ಅ} \end{aligned}$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ಪ}^2 + \frac{\text{ಪಿ}}{\text{ಪ್ಪ}} = \text{ಅ} - ೨\text{ಅ}.$$

ಉ. ಲ. ಯ + ರ = ೨ ಇದ್ದರೆ

$$\begin{aligned} & \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ} = \text{ಅ ಎಂದು ನಿವೃತ್ತಮಾಡಿರಿ.} \\ & \text{ಯ} + \text{ರ} = ೨ \\ & \text{ಘನಮಾಡಿದರೆ, ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ}(\text{ಯ} + \text{ರ}) = \text{ಅ} \\ & \therefore \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ}(೨) = \text{ಅ} \quad \therefore \text{ಯ} + \text{ರ} = ೨ \\ & \therefore \text{ಯ}^2 + \text{ರ}^2 + ೨\text{ಯರ} = \text{ಅ}. \end{aligned}$$

ಉ. ಕ. (೫ಕ-೨ಗ)² - (೨ಕ-೫ಗ)² - ೬(೫ಕ-೨ಗ)(೨ಕ-೫ಗ)

(ಕ+ಗ) ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ

೫ಕ ೨ಗ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ದಿಂದ ಮತ್ತು

೨ಕ-೫ಗ ದ ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ

$$\begin{aligned} & \text{ಪ-ಮ} = (೫ಕ-೨ಗ) - (೨ಕ-೫ಗ) = \\ & ೫ಕ-೨ಗ-೨ಕ+೫ಗ = ೩ಕ-೨ಗ = ೩(ಕ-ಗ). \text{ ಮತ್ತು} \\ & \text{ರಾಶಿಯು} = \text{ಪ}^2 - \text{ಮ}^2 - ೬\text{ಪಮ}(\text{ಪ}-\text{ಮ}) \\ & = (\text{ಪ}-\text{ಮ})^2 \\ & = \{೩(ಕ+ಗ)\}^2 \quad [\because \text{ಪ}-\text{ಮ} = ೩(ಕ-ಗ)] \\ & = ೯(ಕ^2 + ೨ಕಗ + ೨ಕಗ^2 + ಗ^2). \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಘನಗಳ ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಂಥವವಿವೆ.)

೧. ೨ಯ + ೩. ೨. ೪ರ - ೨. ೩. ೨ಯ + ೪ಪ್ಪ.

೪. ಪ+೨ಬ+೩ಮ. ೫. ೩ಪ-ಬ-೪ಮ. ೬. ೫ಯ-೨ರ+೩ಸ.
೭. ಪ+ಪ-೧. ೮. ಪ+ಪಮ+ಮ. ೯. ೩ಯ+೨ಯ+೧.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

೧೦. (ಯ-ನ)^೨-(ಯ-ಮ)^೨+೩(ನ-ಮ)(ಯ-ನ)(ಯ-ಮ).

೧೧. (೨ನ-೩ಮ)^೨-(೩ನ-೨ಮ)^೨+೩(೨ನ-೩ಮ)(೩ನ-೨ಮ)
(ನ+ಮ).

೧೨. ೮(ನ-೪ಮ)^೨-೧೨(ನ-೪ಮ)^೨(೪ನ-ಮ)+
೬(ನ-೪ಮ)(೪ನ-ಮ)^೨-(ನ-೪ಮ)^೨.

೧೩. (ಯ+೮+ಸ)^೨+(ಯ+೮-ಸ)^೨-
೬(೮+ಸ)(ಯ+೮+ಸ)(ಯ-೮+ಸ).

೧೪. (ಯ+೮-೫)^೨-(ಯ-೮+೫)^೨-
೬(೮-೫)^೨-(ಯ+೮-೫)(ಯ-೮+೫).

೧೫. ಪ+ಮ=೫ ಮತ್ತು ನಮ=೬ ಇದ್ದರೆ ಪ^೨+ಮ^೨=?

೧೬. ತ+ದ=೧ ಮತ್ತು ತದ=೧ ಇದ್ದರೆ ತ^೨+ದ^೨=?

೧೭. ನ-ಮ= -೩ ಮತ್ತು ನಮ= -೨ ಇದ್ದರೆ ನ^೨-ಮ^೨=?

೧೮. ನ+^೧/_೨ = -೨ ಇದ್ದರೆ ನ+^೧/_೨ =?

೧೯. ಪ-^೧/_೨ = ೨ ಇದ್ದರೆ ಪ^೨-^೧/_೪ =?

೨೦. ನ-^೧/_೨ = ೧ ಇದ್ದರೆ ನ^೨-^೧/_೪ =?

೨೧. ಮ=೫ ಇದ್ದರೆ ಮ^೨-೧೫ಮ^೨+೨೫ಮ-೧೨೫=?

೨೨. ನ=^೧/_೨ ಇದ್ದರೆ ನ^೨+ನ^೨+^೧/_೨ನ+^೧/_೪=?

೨೩. ನ=೨ಮ=೩ ಇದ್ದರೆ ೨೩ನ^೨-೫೫ನ^೨ಮ+೩೩ನಮ-೮ಮ^೨=?

೨೪. ರ=೨೨, ಸ=೧ ಇದ್ದರೆ

೮ರ^೨+೩೬ರಸ+೫೪ರಸ^೨+೨೨ಸ^೨+೧೨೫=?

೨೫. ನ+ಮ=೭ ಇದ್ದರೆ

ನ^೨+ಮ^೨+೨೧ನಮ=೩೪೩ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ಯಾವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದವು ಸಾಧಾರಣವಿರುವದೋ ಅಂಥ ಮೂರು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ಘನ + ಸಾಧಾರಣ ಪದದ ವರ್ಗ ಗುಣಿತ ಬೇರೆ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು + ಸಾಧಾರಣ ಪದ ಗುಣಿತ ಬೇರೆ ಮೂರು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜು + ಆ ಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಇಂದು ಇದೇ ಸಂಗತಿಯ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಜ್ಜೇಷೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೧. } (ಯ+೧)(ಯ+೩)(ಯ+೬) \\ &= ಯ^3 + (೧+೩+೬)ಯ^2 + (೧\cdot ೩ + ೩\cdot ೬ + ೬\cdot ೧)ಯ \\ &\quad + ೧\cdot ೩\cdot ೬ \\ &= ಯ^3 + ೧೦ಯ^2 + ೨೭ಯ + ೧೮.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೨. } (ರ+೨)(ರ-೪)(ರ+೮) \\ &= ರ^3 + (೨-೪+೮)ರ^2 + (-೨\cdot ೪ - ೪\cdot ೮ + ೮\cdot ೨)ರ \\ &\quad - ೨\cdot ೪\cdot ೮ \\ &= ರ^3 + ೬ರ^2 - ೨೪ರ - ೬೪.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೩. } (ಸ-೩)(ಸ+೫)(ಸ-೧೦) \\ &= ಸ^3 + (-೩+೫-೧೦)ಸ^2 + \\ &\quad (-೩\cdot ೫ - ೫\cdot ೧೦ + ೧೦\cdot ೩)ಸ + ೧೫೦. \\ &= ಸ^3 + ೮ಸ^2 - ೩೫ಸ + ೧೫೦.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಉ. ೪. } (ನ-೮)(ನ+೫)(ನ-೨) \text{ ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ,} \\ (-೮)+೫+(-೨)=-೫, \\ (-೮)\cdot ೫+೫\cdot (-೨)+(-೨)(-೮)=-೪೦-೧೦+ \\ ೧೬=-೩೪, \\ \text{ಮತ್ತು } (-೮)\cdot ೫\cdot (-೨)=೮೦, \text{ ಇದ್ದು ಮೊತ್ತ} \\ \text{ಇಷ್ಟು ಗುಣಾಕಾರವು}=ನ^3-೫ನ^2-೩೪ನ+೮೦.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೫. } & (\bar{v}-\bar{u})(\bar{v}+u)(\bar{v}-u) \\
 & = \bar{v}^2 + (-\bar{u} + u - \bar{u})\bar{v} + \\
 & \quad (-\bar{u} + u + u - \bar{u})\bar{v} + u^2 - \bar{u}^2 \\
 & = \bar{v}^2 - \bar{u}^2 + 2\bar{u}\bar{v} + u^2 - \bar{u}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{ಉ. ೬. } (\bar{c}-a)(\bar{c}-b)(\bar{c}-d) - (\bar{c}-b)^2(\bar{c}-d)$$

ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & (\bar{c}-a)(\bar{c}-b)(\bar{c}-d) \\
 & = \bar{c}^3 - (a+b+d)\bar{c}^2 + (ab+bd+ad)\bar{c} \\
 & \quad - abd \\
 & = \bar{c}^3 - a\bar{c}^2 + b\bar{c}^2 - d\bar{c}^2 \\
 & \quad + (ab+bd+ad)\bar{c} - ab\bar{c} - b\bar{c}d - a\bar{c}d \\
 & = \bar{c}^3 - a\bar{c}^2 + b\bar{c}^2 - d\bar{c}^2 + ab\bar{c} - ab\bar{c} + b\bar{c}d - b\bar{c}d \\
 & \quad + a\bar{c}d - a\bar{c}d \\
 & = \bar{c}^3 - a\bar{c}^2 + b\bar{c}^2 - d\bar{c}^2
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ $\bar{c}-b$ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಶವಾಗಿರುವುದು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= (\bar{c}-b) \{ (\bar{c}-a)(\bar{c}-d) - (\bar{c}-b)(\bar{c}-d) \} \\
 &= (\bar{c}-b) \{ (\bar{c}^2 - a\bar{c} + b\bar{c} - d\bar{c}) - (\bar{c}^2 - b\bar{c} + b\bar{c} - d\bar{c}) \} \\
 &= (\bar{c}-b)(\bar{c}-d)
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ರೀತಿಯು ಮೊದಲನೆಯದರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಸ್ಪಷ್ಟವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೮.

ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ. ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$$1. \quad x^2 + 3x + 2, \quad 2. \quad x^2 - 2x + 1, \quad 3. \quad x^2 + 3x + 2$$

೩. ವ-೮,ವ-೧೦,ವ-೩. ಳ. ೫-ಮ,೩-ಮ,೧೦-ಮ.
 ೫. ೫-೩೩,೫-೨೩,೫+೩೩. ೬. ೨೩+೫,೨೩+೩,೨೩+೩.
 ೭. ೮ರ+೧,೮ರ-೫,೮ರ+೩. ೮. ೩ರ+೨೩,೩ರ-೫೩,೩ರ+೩೩.
 ೯. ೫ಯ-೨೩,೫ಯ-೩,೫ಯ-೪೩.
 ೧೦. ೩+೩ಸ, ೨೩+೩ಸ, ೩೩+೩ಸ.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧೧. (ಯ-೫)(ಯ+೮)(ಯ-೧೦)-(ಯ+೮)²(ಯ-೨).
 ೧೨. (ರ-೩)(ರ+೩)(ರ+೨)-(ರ+೨)²(ರ-೫).
 ೧೩. (ವ+೧೦)(ವ-೨)(ವ+೫)-(ವ+೫)²(ವ+೪).
 ೧೪. (೨ಸ-೩)(೨ಸ-೫)(೨ಸ-೯)-(೨ಸ-೫)².
 ೧೫. (೩ಸ-೧)(೩ಸ-೨)(೩ಸ-೫)-(೩ಸ+೧)(೩ಸ-೨)(೩ಸ-೪)

ಇದಕ್ಕೆ ಸ-೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೧೬. (೫ಸ+೩)(೫ಸ-೧)(೫ಸ-೨)-(೫ಸ-೧)²(೫ಸ-೪) ಇದಕ್ಕೆ
 ೩ಸ-೧ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣ (ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದುದು)

೧.

ಪ^೨-ಮ^೨ ≡ (ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)

ಅ.೧. ಎರಡು ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೧೪, ೧೧೯) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಯಾವದಾದರೊಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಅಂತರದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬಂದರೆ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಅಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನಾದರೂ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೨೧). ಇಂದು ಈಗ ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪರ್ಯಾಯಿಸಿ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವಾ.

ಉ. ೧. ೬೪ನ^೨+೧. ಇಲ್ಲಿ ೬೪ನ^೨ ಇದು ೮ನ^೨ದ ವರ್ಗವಿದ್ದು ೮ನ^೨ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು (೧೬ನ^೨) ಮೂಲ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

೬೪ನ^೨+೧=೬೪ನ^೨+೧೬ನ^೨+೧-೧೬ನ^೨

= (೮ನ^೨+೧)^೨-(೪ನ^೨)

= (೮ನ^೨+೪ನ+೧)(೮ನ^೨-೪ನ+೧).

ಉ. ೨. ಯ^೨+೨ಯ^೨+೯ = ಯ^೨+೬ಯ^೨+೯-೪ಯ^೨

= (ಯ^೨+೩)^೨-(೨ಯ^೨)

= (ಯ^೨+೨ಯ+೩)(ಯ^೨-೨ಯ+೩).

ಉ. ೩. ೪ಪ^೨-೯ಬ^೨+೩೦ಬಮ-೨೫ಮ^೨

= ೪ಪ^೨-(೯ಬ^೨-೩೦ಬಮ+೨೫ಮ^೨)

= (೨ಪ^೨)-(೩ಬ-೫ಮ)^೨

$$= (ಅಪ + ಓಬ - ಹಮ)(ಅಪ - ಓಬ + ಹಮ).$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪. } & (ಬಮ - ಪಭ) + ಪ - ಬ + ಭ - ಮ \\ & = ಪ - ಅಪಭ + ಭ - ಬ + ಅಬಮ - ಮ \\ & = (ಪ - ಅಪಭ + ಭ) - (ಬ - ಅಬಮ + ಮ) \\ & = (ಪ - ಭ) - (ಬ - ಮ) \\ & = \{(ಪ - ಭ) + (ಬ - ಮ)\} \{(ಪ - ಭ) - (ಬ - ಮ)\} \\ & = (ಪ + ಬ - ಭ - ಮ)(ಪ - ಬ - ಭ + ಮ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೫. } & ಐಯ + ಗಹಯ + ಗನವ \\ & = ಐಯ + ಅಐಯ + ಗನವ - ಐಯ \\ & = (ಐಯ + ಳವ) - (ಐಯ) \\ & = (ಐಯ + ಐಯನ + ಳವ)(ಐಯ - ಐಯನ + ಳವ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೬. } & ಗಹಪ - ಬ - ಮ + ಅಪಬ + ಅಬಮ - ಅಮಪ \\ & = ಗಹಪ - (ಪ + ಬ + ಮ - ಅಪಬ - ಅಬಮ + ಅಮಪ) \\ & = (ಳಪ) - (ಪ - ಬ + ಮ) \\ & = \{\ಳಪ + (ಪ - ಬ + ಮ)\} \{\ಳಪ - (ಪ - ಬ + ಮ)\} \\ & = (ಳಪ - ಬ + ಮ)(ಳಪ + ಬ - ಮ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೭. } & (ಅ - ಕ)(ಯ - ರ) - ಳಅಕಯರ \\ & = ಅಯ - ಅರ - ಕಯ + ಕರ - ಳಅಕಯರ \\ & = (ಅಯ - ಅಕಯರ + ಕರ) - \\ & \quad (ಕಯ + ಅರ) \\ & = (ಅಯ - ಕರ) - (ಕಯ + ಅರ) \\ & = (ಅಯ - ಕರ + ಕಯ + ಅರ)(ಅಯ - ಕರ - ಕಯ - ಅರ) \\ & = \{(ಅ + ಕ)ಯ + (ಅ - ಕ)ರ\} \{(ಅ - ಕ)ಯ - (ಅ + ಕ)ರ\} \end{aligned}$$

ಉ. ೮. ಳಯ - ಅಯ - ಅಳ + ಳರ - ಐರ. ಇಲ್ಲಿ ಳಯ - ಅಯ ಈ ಜೋಡಿಗೆ ಹಾಕಿ ಅಂದರೆ ಅಳ ಇದ್ದರೆ ಅದು (ಳಯ - ಅಯ + ಅಳ) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವಸ್ತುವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ವಾಕ್ಯವು ಪುನರ್ನಿರ್ಮಿತವಾಗಿದ್ದು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು:

$$\begin{aligned}
 \text{ಪಾತಿಯು} &= \text{ಯು} - \text{ಉಯ} + \text{ಉ} - \text{ಉ} + \text{ಉ} - \text{ಉ} \\
 &= (\text{ಯು} - \text{ಉಯ} + \text{ಉ}) - (\text{ಉ} - \text{ಉ} + \text{ಉ}) \\
 &= (\text{ಯು} - \text{ಉ}) - (\text{ಉ} - \text{ಉ}) \\
 &= \{(\text{ಯು} - \text{ಉ}) + (\text{ಉ} - \text{ಉ})\} \{(\text{ಯು} - \text{ಉ}) - (\text{ಉ} - \text{ಉ})\} \\
 &= (\text{ಯು} - \text{ಉ} + \text{ಉ}) (\text{ಯು} + \text{ಉ} - \text{ಉ}).
 \end{aligned}$$

೨.೨. ಪು-ಮು = (ಪ+ಮ) (ಪ-ಮ) ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಯು+ಕಯ+ಗ ಇಲ್ಲವೆ ಆಯು+ಕಯ+ಗ ದಂಥ ವರ್ಗಪ್ರಪದಿಯ ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೆ (ಭಾ. ೨, ಪು. ೧೫೦-೧೬೧) ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅವರ ಸ್ವಲ್ಪ ಪುನರಾವಲೋಕನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡುವಾ.

ವರ್ಗಪದವ ಸಹಗುಣಕವು ೧ ಇರುವ ಯು-ಉಯ-೩೭೪ ರಂಥ ವರ್ಗಪ್ರಪದಿಯ ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ? ಯು-ಉಯ ದ ಜೊತೆಗೆ ೩೭೪ ವರ್ಗ ಅಂದರೆ ೩೫ ಇದ್ದರೆ ಯು-ಉಯ+೩೫ ಇದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಪಾತಿಯನ್ನು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸುವೆವು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೯. ಯು-ಉಯ-೩೭೪} \\
 &= \text{ಯು-ಉಯ} + \frac{೩೫}{೪} - \frac{೧೫೨೧}{೪} \\
 &= \left(\text{ಯು} - \frac{೫}{೨} \right)^೨ - \left(\frac{೩೯}{೨} \right)^೨ \\
 &= \left(\text{ಯು} - \frac{೫}{೨} - \frac{೩೯}{೨} \right) \left(\text{ಯು} - \frac{೫}{೨} + \frac{೩೯}{೨} \right) \\
 &= (\text{ಯು} + ೧೭) (\text{ಯು} - ೨೨).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧೦. ಉಯು+೪೬ಯ-೨೪} \\
 &= ೩೫ \left(\text{ಯು} + \frac{೪೬}{೩೫} \text{ಯು} - \frac{೨೪}{೩೫} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ೩೫ \left\{ ಯ^೨ + \frac{೪೬}{೩೫} ಯ + \left(\frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ + \left(\frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ - \frac{೨೪}{೩೫} \right\} \\
&= ೩೫ \left\{ ಯ^೨ + \frac{೪೬}{೩೫} ಯ + \left(\frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ + \frac{೧೩೬೯}{೩೫ \times ೩೫} \right\} \\
&= ೩೫ \left\{ \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} \right)^೨ - \left(\frac{೩೭}{೩೫} \right)^೨ \right\} \\
&= ೩೫ \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} + \frac{೩೭}{೩೫} \right) \left(ಯ + \frac{೨೩}{೩೫} - \frac{೩೭}{೩೫} \right) \\
&= ೭ \times ೫ \left(ಯ + \frac{೧೨}{೭} \right) \left(ಯ - \frac{೨}{೫} \right) \\
&= (೭ಯ + ೧೨)(೫ಯ - ೨).
\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲಿರುವ ಯ^೨-೨ಕಯ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಯ^೨ + ೨ಕಯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ^೨ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವದಿಂಬ ಸಂಗತಿಯ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ.

ಇದರಂತೆಯೇ ವರ್ಗಾಂತರಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ **ಅಯ^೨ + ಕಯ + ಗ** ವಂಥ ವರ್ಗ ತ್ರಿಪದಿಯ ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸುಲಭವಾದ ಮತ್ತು ತೀವ್ರವಾದ ರೀತಿಯು ನೆನಪಿಗೆ ಬಾರದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೯.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಬ^೨—೧೮ಬ + ೮೧—೯ಮ^೨. ೨. ೪೮೨ + ೨೮೮ + ೪೯ — ೨೫ಕ^೨.
೩. ೨೫೮ — ೨೦೮ಕ + ೪ಕ — ೪ಗ^೨ + ೪ಗಘ — ಘ^೨.
೪. ೮೨ + ೪ಕ೪. ೫. ೮೧ಪ೪ + ೬೪ಮ೪.
೬. ೩೨೪ರ೪ + ೬೫ಸ೪. ೭. ಯ೪ — ೩ಯ^೨ + ೧.
೮. ಪ೪ — ೧೧ಸಮ + ಮ೪. ೯. ೯ಯ೪ — ೧೩ಯ^೨ರ೨ — ೪ರ೨.
೧೦. ೬೪ಮ೪ + ೨೩ಮ^೨ಯ^೨ + ೯ಯ೪.

೧೧. ಲಗಪಃ — ಲಗಪಾಮಃ + ಲಮಃ.
 ೧೨. ಲಯಃ + ಅಂಯಃ + ಗು — ಅಲರ — ಗುರಃ.
 ೧೩. ಅನಃ — ಫಮಃ — ಅನಃ + ಅಮಃ + ಓ.
 ೧೪. ಲರಃ — ಸಃ — ಗುರಃ — ಗುಸಃ — ಗು.
 ೧೫. ಯಃ + ರಃ — ಲಃ — ಸಃ + ಅಯರ + ಅಲವ.
 ೧೬. ಲತಃ + ಅದಃ — ಫನಃ — ಅಂತವಃ + ಅಲನಃ — ಗು.
 ೧೭. ಅಕಃ — ಫಕಃ — ಗುಗಃ + ಅಂತಕಃ + ಅಲಕಗ.
 ೧೮. ಲಪಃ + ಅಪಾಮಃ + ಲಮಃ — ಗುಪಃ — ಬಃ — ಮ.
 ೧೯. ಗುಯಃ — ಲರಃ — ಲಃ + ಗುಯರಃ + ಲರಲ — ಅಲಯ.
 ೨೦. ಗುಯಃ + ಅಲಯಃ + ಅ. ೨೧. ಅನಃ — ಅನಃ — ಅ.
 ೨೨. ಅಕಃ — ಅಕಃ — ಅಲಕಃ.
 ೨೩. ಅ(ಅಯ — ಅರ) — ಲಯಃ + ಅ.
 ೨೪. ಅಲಕಃ + ಅಲಕಃ — ಅಲಕಃ — ಅ. ೨೫. ಅನಃ — ಅನಃ + ಗು.

೨.

ಪಃ ± ಮಃ ≡ (ಪ ± ಮ) (ಸಃ ± ಪಮಃ + ಮಃ)

೨-೨. ಹಿಂದೆ (ಭಾಗ ೨ ಪು. ೧೨೨) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು = ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು × (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು — ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ) ಮತ್ತು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ = ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ × (ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು + ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ) ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಈ ನಿಯಮದ ಬುಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಅದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಂಥವೇ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬುಪಯೋಗಿಸುವಾ.

ಉ. ೧. ಯಃ + ಫಯಃ + ಅಂಯಃ + ಗು ಇಲ್ಲಿ ಯಃ + ಫಯಃ + ಅಂಯಃ ದ ಜೊತೆಗೆ ಅಂನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಯಃ + ಅದರ ಘನವಾಗುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಅದುದರಿಂದ

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

ಉ.ಖ. ಅ-ಆ-ಇ.-ಆದಿ ದೇವತೆಗಳು + ಆದಿ ಹೀಗೆ ಛಾಂದೋಗ್ಯ
ಮಾದಿತ್ಯ - ಆದಿ-ಇ = ಆದಿ-ಆದಿ + ಆದಿ-ಇ

$$= \psi(\psi^2 - \psi) + \psi(\psi - 1)$$

$$= 3(3-2)(3^2+2^2+2)+2(3-2)$$

$$= (u - v) \{ u(u^2 + uv + v^2) + v \}$$

$$= (c - 3)(c^2 + 3c^2 + 9c + 3).$$

೉. ೬. ಯಿ + ಬಿಯಿ - ೧೭ಯಿ - ೬೦. - ೬೦ ಶವರ - ೬೪ ಮುತ್ತು + ೪
ಹೇಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ

$$ಮೈ + ೪ಮೈ - ೧೭ಮೈ - ೬೦ = ಮೈ - ೬೪ + ೪ಮೈ - ೧೭ಮೈ + ೪$$

$$= (\text{သေ} - ၁)(\text{သေ} + ၁) + (\text{သေ} - ၁)(\text{သေ} - ၁)$$

$$= (y - 1)(y^3 + 4y^2 + 9y + 4y - 1)$$

$$= (y - x)(y^2 - xy + x^2)$$

$$= (x - 2)(x + 3)(x + 5).$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

८. ८७५३—७५३—७८६+७.

૭. ૪-૫૩૧+૩૩૧-૩૩૧.

೩. ಕೃ-ಽಕೃ-೧೦ಕ+ಅಃ. ೪. ಜಿ-೧೨ಜಿ+ಅಃ-೦.

ಜಿ. ಅಭ್ಯಾಸ + ಅರಿಯು - ಅರಿಯು - ಇ.

உ. ஐயரது - ஐயரது + ஐய - ஐ. உ. ரது - ஐயரது + ஐய.

೮. ಅಂತ್ಯ - ಸ್ವರ + ಗು. ೯. ಮು + ನಿಮು - ನಿಘು.

१०. $2^3 - 3^2 + १०८$. १०. $2^3 + 3^2 + ९$.

၈၉. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}$ ၉၀. $(x+y)^2 - (x-y)^2$

೧೪. $(a-b)^2 - (c-d)^2$. ೧೫. $(x-y)^2 + 2(x+y)^2$.

೧೬. $y^2 + x^2 + (y + x)^2$ ೧೭. ೬೪೨—೭೫೩.

୧୯. ଫୁଲ ୨ — ଟୁନ ୨.

౧౯. ఇళిషపశువు—తరిపశువు.

೨೦. $ಋ+ಆ+ಇ=೧೨೫ಕ$.೨೧. $(ಪ+ಓ)^೨=೭೫$.೨೨. $(ಸ+೧)೨=(ನ+೧)೨$.೨೩. $ಪ=೨೮, ಮ=೭$ ಇದ್ದರೆ $(ಓಪ+೫ಮ)²+(೨ಪ+೭ಮ)²=?$ ೨೪. $ಅ=೫.೨, ಕ=೮.೫, ಗ=೫.೨$ ಇದ್ದರೆ $(ಅ+೨ಕ)²$
 $-(೨ಕ-ಗ)²=?$

೩-

(ಯ+ಪ)(ಯ+ಬ)(ಯ+ಭ)(ಯ+ಮ)+ಕ.

೨.೮. ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು ಒಂದೇ ಇರುವಂಥ ನಾಲ್ಕು ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಹಲವು ಸಾರೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉ. ೧. $(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೪)(ಯ+೫)+೨$ ಇಲ್ಲಿ $(ಯ+೧)$ ಮತ್ತು $(ಯ+೫)$ ಇವೆರಡರ ಮತ್ತು $(ಯ+೨)$ ಮತ್ತು $(ಯ+೪)$ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು ಅವೇ ಅದರ ಯ+೬ಯ ಬರುವವು. ಮತ್ತು ಯ+೬ಯ ದ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಆ ಈ ಆಶೀಶದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂಚಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 & (ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೪)(ಯ+೫)+೨ \\
 & = \{ (ಯ+೧)(ಯ+೫) \} \{ (ಯ+೨)(ಯ+೪) \} + ೨ \\
 & = (ಯ+೬ಯ+೫)(ಯ+೬ಯ+೮)+೨ \\
 & = (ಅ-೫)(ಅ+೮)+೨ \\
 & = ಅ+೧೩ಅ+೪೨ \\
 & = (ಅ+೬)(ಅ+೭) \\
 & = (ಯ+೬ಯ+೬)(ಯ+೬ಯ+೭)
 \end{aligned}$$

[\therefore ಅ=ಯ+೬ಯ

ಉ. ೨. (ರ-೨)(ರ-೫)(ರ-೧)(ರ+೩)+೧೫. ಇಲ್ಲಿ ರ-೨ ಮತ್ತು ರ+೩ ಹಾಗೂ (ರ-೫) ಮತ್ತು ರ+೧ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಗುಂಪು ರ-೪ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ

$$\begin{aligned} &= \{(ರ-೨)(ರ+೩)\} \{(ರ+೫)(ರ+೧)\} + ೧೫ \\ &= (ರ-೪ರ-೨೧)(ರ-೪ರ-೫) + ೧೫ \\ &= (ಅ-೨೧)(ಅ-೫) + ೧೫ \quad [ರ-೪ರ ವನ್ನು ಅ ದಿಂದ ಆದೇಶಿಸಿ] \\ &= ಅ-೨೬ಅ + ೧೨೦ \\ &= (ಅ-೨೦)(ಅ-೬) \\ &= (ರ-೪ರ-೨೦)(ರ-೪ರ-೬) \quad [\because ಅ = ರ-೪ರ] \end{aligned}$$

ಉ. ೩. (ಓನ-೫)(ಓನ-೨)(ಓನ+೧೦)(ಓನ+೨)-೩೭. ಇಲ್ಲಿ -೫+೧೦=೫, ಮತ್ತು -೨+೨=೦. ಅದುದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಓನ-೫ ಮತ್ತು ಓನ+೧೦ ಹಾಗೂ ಓನ-೨ ಮತ್ತು ಓನ+೨ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ರಾಶಿಯು

$$\begin{aligned} &= \{(ಓನ-೫)(ಓನ+೧೦)\} \{(ಓನ-೨)(ಓನ+೨)\} - ೩೭ \\ &= (ಫನ+೧೫ನ-೫೦) (ಫನ+೧೫ನ-೧೪) - ೩೭ \\ &= (ಅ-೫೦)(ಅ-೧೪) - ೩೭ \quad [ಫನ+೧೫ನ ದ ಬದಲಾಗಿ] \\ &= ಅ-೬೪ಅ + ೬೬೨ \quad \text{ಅ ಇಟ್ಟು} \\ &= (ಅ-೫೦)(ಅ-೧೩) \\ &= (ಫನ+೧೫ನ-೫೦)(ಫನ-೧೫ನ-೧೩) \\ &[\because ಅ = ಫನ+೧೫ನ] \\ &= ೩(ಓನ-೫ನ-೧೩)(ಫನ-೧೫ನ-೧೩). \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವವೇನೆಂದರೆ ಯಾವ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಪದಗಳು ಒಂದೇ ಇರುವವೋ ಅಂಥ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿ ರೂಪಕ್ಕಾಗಿ ಇದೇ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಉ. ೪. (ಯ+೫)(ಯ+೪)(ಅಯ—೩)(ಅಯ—೧)—೧೨.

ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಯ^೨—ಪ ದ ಮತ್ತು ಯ—ಪ ದ ಇವು ಒಂದೇ ಇರುವಂಥ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಆರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅಂಥ ಜೋಡಿಗಳು ಯ+೫ ಮತ್ತು ಅಯ—೩ ಹಾಗೂ ಯ+೪ ಅಯ—೧. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ಒಂದ ಅಯ^೨—೩ಯ ಇರುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಗುಣವೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯ ಪುನರ್ವಿಜನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \{(ಯ+೫)(ಅಯ—೩)\} \{(ಯ+೪)(ಅಯ—೧)\} - ೧೨ \\
 &= (ಅಯ^೨ + ೩ಯ - ೧೫)(ಅಯ^೨ + ೩ಯ - ೪) - ೧೨ \\
 &= (ಅ - ೧೫)(ಅ - ೪) - ೧೨ [ಅಯ^೨ + ೩ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ \\
 &= ಅ^೨ - ೧೯ಅ + ೪೨ \hspace{10em} ತೆಗೆದುಕೊಂಡು \\
 &= (ಅ - ೧೬)(ಅ - ೩) \\
 &= (ಅಯ^೨ + ೩ಯ - ೧೬)(ಅಯ^೨ - ೩ಯ - ೩)
 \end{aligned}$$

$$[\because ಅ = ಅಯ^೨ + ೩ಯ]$$

ಉ. ೫. ಯ (ಯ+೫ಕ)(ಯ—ಕ)(ಯ—೬ಕ) + ೧೪೪ಕ^೨. ಇಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ಯ—೪ ಹಾಗೂ ಯ—೫ಕ ಮತ್ತು ಯ—೬ಕ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \{ಯ (ಯ—ಕ)\} \{(ಯ+೫ಕ)(ಯ—೬ಕ)\} + ೧೪೪ಕ^೨ \\
 &= (ಯ^೨ - ಕಯ)(ಯ^೨ - ಕಯ - ೬೦ಕ^೨) + ೧೪೪ಕ^೨ \\
 &= ಅ (ಅ - ೬೦ಕ^೨) + ೧೪೪ಕ^೨ [ಯ^೨ - ಕಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಅ \\
 &= ಅ^೨ - ೬೦ಕ^೨ಅ + ೧೪೪ಕ^೨ \hspace{10em} ಇಟ್ಟು, \\
 &= (ಅ - ೬ಕ^೨)(ಅ - ೨೪ಕ^೨) \\
 &= (ಯ^೨ - ಕಯ - ೬ಕ^೨)(ಯ^೨ - ಕಯ - ೨೪ಕ^೨) \\
 &[\because ಅ = ಯ^೨ - ಕಯ] \\
 &= (ಯ - ೬ಕ)(ಯ + ೨ಕ)(ಯ^೨ - ಯಕ - ೨೪ಕ^೨) .
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ತರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. (೮+೨)(೮+೬)(೮+೯)(೮+೫)+೨೦.
೨. (ವ-೨)(ವ-೪)(ವ-೨)(ವ-೬)-೩೬.
೩. (ಜ-೪)(ಜ-೨)(ಜ+೫)(ಜ+೬)+೮೦.
೪. ಪ(ಪ-೧)(ಪ+೫)(ಪ+೬)-೬೨.
೫. ಗ(ಗ+೧)(೩ಗ-೨)(೩ಗ-೫)+೪.
೬. (೪ಯ-೨)(೪ಯ-೧)(೪ಯ+೫)(೪ಯ+೬)+೫೫.
೭. ಯ(ಯ-೨ನ)(ಯ+೪ನ)(ಯ+೬ನ)+೨೫ನ೪.
೮. (೨ರ-೩ನ)(೨ರ-೫ನ)(೨ರ-೬ನ)(೨ರ-೯ನ)+೧೧ನ೪.
೯. (೩ರ-೫ಕ)(೩ರ-೪ಕ)(೩ರ+೬ಕ)(೩ರ+೭ಕ)-೫೫ಕ೪.

$$\begin{aligned} & ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೩ಪಬಮ = (ಪ + ಬ + ಮ) \\ & (ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ಪಬ - ಬಮ - ಮಪ) \end{aligned}$$

೪.

೨೫. ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಅವೆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮೂಮ್ಮಡಿ, ಈ ಸ್ವರೂಪದ ರಾತ್ರಿ-ಯಿದ್ದರೆ ಅದರ ಗುಣ ಪ್ರಥಕ್ತರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ೩ಪಬಮ$$

$$\equiv (ಪ + ಬ)^೨ - ೩ಪಬ(ಪ + ಬ) + ಮ^೨ - ೩ಪಬಮ$$

$$\equiv (ಪ + ಬ)^೨ + ಮ^೨ - ೩ಪಬ(ಪ + ಬ) - ೩ಪಬಮ$$

$$\equiv (ಪ + ಬ + ಮ) \{ (ಪ + ಬ)^೨ - ಮ(ಪ + ಬ) + ಮ^೨ \} - ೩ಪಬ(ಪ + ಬ + ಮ)$$

$$\equiv (ಪ + ಬ + ಮ)(ಪ^೨ + ೨ಪಬ + ಬ^೨ - ಮಪ - ಬಮ + ಮ^೨ - ೩ಪಬ)$$

$$\equiv (ಪ + ಬ + ಮ)(ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ - ಪಬ - ಬಮ - ಮಪ)$$

ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತಿನಲ್ಲಿ ಪ^೨ - ಬ^೨ ಇದು ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದಾದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು (ಘನಗಳ ಇದೇ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಯಾವುದಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಬರುವದು) (ಪ + ಬ)^೨ - ೩ಪಬ(ಪ + ಬ)

ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂಲಕ ಮೂಲರಾಶಿಯ ಈ ಬದಲಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಘನಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಎರಡು ಘನಗಳು ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಎರಡು ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ತಿಳಿಯಲು ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮೂರನೇ ಹಂತಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ಹೀಗೆ ಪ್ರಮಾದಿಂದ ಹೋದಂತೆ ಆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವಯವಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಬೇರೊಂದು ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಉಣಾ ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಒರೆಯುವ-
ದಿಂದ:

ಪ^೩ + ಬ^೩ + ಮ^೩ — ೩ಪಬಮ

≡ (ಪ + ಬ + ಮ) (ಪ^೨ + ಬ^೨ + ಮ^೨ — ಪಬ — ಬಮ — ಬಮ)

≡_೩ (ಪ + ಬ + ಮ) (೨ಪ^೨ + ೨ಬ^೨ + ೨ಮ^೨ — ೨ಪಬ — ೨ಬಮ — ೨ಮಪ)

≡_೩ (ಪ + ಬ + ಮ) {(ಪ^೨ — ೨ಪಬ + ಬ^೨) + (ಬ^೨ — ೨ಬಮ + ಮ^೨) + (ಮ^೨ — ೨ಮಪ + ಪ^೨)}

≡_೩ (ಪ + ಬ + ಮ) {(ಪ — ಬ)^೨ + (ಬ — ಮ)^೨ + (ಮ — ಪ)^೨}.

೨.೬. ಮೇಲಿನ ಗುಣಕಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಈಗ ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಉ. ೧. ಲಯ^೩ + ೨೬ರ^೩ + ಲ^೩ — ೧೮ಯರಲ. ಇಲ್ಲಿ ಲಯ^೩ ಮತ್ತು ೨೬ರ^೩ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಯ ಮತ್ತು ೩ರ ಇವುಗಳ ಘನಗಳಿದ್ದು ೧೮ಯರಲ ಇದು ೨ಯ, ೩ರ ಮತ್ತು ಲ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇರುವದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು.

ರಾಶಿಯು = (೨ಯ)^೩ + (೩ರ)^೩ + ಲ^೩ — ೩. ೨ಯ. ೩ರ. ಲ

= (೨ಯ + ೩ರ + ಲ)

(೪ಯ^೨ + ೯ರ^೨ + ಲ^೨ — ೬ಯರ — ೩ರಲ — ೨ಲಯ).

ಉ. ೨. ತ^೩ — ದ^೩ + ನ^೩ + ೩ತದನ. — ದ^೩ = + (—ದ)^೩, ಮತ್ತು ೩ತದನ = —೩ತ(—ದ)^೩.

$$\begin{aligned} \therefore \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ತ}^2 + (-\text{ವ})^2 + \text{ನ}^2 - ೨\text{ತ}(-\text{ದ})\text{ನ} \\ &= (\text{ತ} - \text{ದ} + \text{ನ})\{\text{ತ} + (-\text{ದ}) + \text{ನ} - \text{ತ}(-\text{ದ}) - (-\text{ದ})\text{ನ} - \text{ನ}\text{ತ}\} \\ &= (\text{ತ} - \text{ದ} + \text{ನ})\{\text{ತ} + \text{ದ} + \text{ನ} + \text{ತದ} + \text{ದನ} - \text{ನತ}\}. \end{aligned}$$

ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉಪಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಸಂಕ್ಷೋಚದ ಮೂಲಕ ಕೇವಲ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಪ್ರಕಾಶವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆದರೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರು ಮೂಲರೀತಿಯನ್ನವಲಂಬಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಹಿತಕರವಾದುದು.

ಉ. ೩. ೨೧೬ಯ^೨ - ೬೪ರ^೨ - ೧೨೫ಲ^೨ - ೨೬೦ಯರಲ.

$$= (\text{೬ಯ})^2 + (-\text{೪ರ})^2 + (-\text{೫ಲ})^2 - ೨\cdot ೬ಯ(-\text{೪ರ})(-\text{೫ಲ})$$

$$= (\text{೬ಯ} - ೪ರ - ೫ಲ)$$

$$(\text{೬೬ಯ} + ೧೬ರ + ೨೫ಲ + ೨೪ಯರ - ೨೦ರಲ + ೨೦ಲಯ).$$

ಉ. ೪. ೮೨೨^೨ - ೬೪ಕ^೨ + ೨೪೨ಕ + ೧. ಇಲ್ಲಿ ೮೨೨^೨, - ೬೪ಕ^೨ ಮತ್ತು ೧ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨೨, - ೪ಕ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳ ಘನಗಳಿದ್ದು ೨೪೨ಕ = - ೨\cdot ೨೨(- ೪ಕ) \cdot ೧.

$$\begin{aligned} \therefore \text{ರಾಶಿಯು} &= (\text{೨೨})^2 + (-\text{೪ಕ})^2 + (\text{೧})^2 - ೨\cdot ೨೨(- ೪ಕ)\cdot ೧ \\ &= (\text{೨೨} - ೪ಕ + ೧) \end{aligned}$$

$$(\text{೪೨೨} + ೧೬ಕ + ೧ + ೮೨೨ಕ + ೪ಕ - ೨೨)$$

$$= (\text{೨೨} - ೪ಕ + ೧)$$

$$(\text{೪೨೨} + ೮೨೨ಕ + ೧೬ಕ - ೨೨ + ೪ಕ + ೧).$$

ಉ. ೫. ೨೭೨೨ + ೧೦೨೨ + ೧. ಇಲ್ಲಿ ೧೦೨೨ ದ = ೨೨ ಮತ್ತು ೧೦೨೨ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\text{ರಾಶಿಯು} = ೨೭೨೨ - ೨೨ + ೧ + ೧೦೨೨$$

$$= (\text{೨೭೨೨})^2 + (-\text{೨೨})^2 + (\text{೧})^2 - ೨\cdot ೨೭೨೨(-\text{೨೨}) \cdot ೧$$

$$= (\text{೨೭೨೨} - ೨೨ + ೧)(\text{೨೭೨೨} + ೨೨ + ೧ + ೨೭೨೨ + ೨೨ - ೨೨)$$

$$= (\text{೨೭೨೨} - ೨೨ + ೧)(\text{೨೭೨೨} + ೨೨ + ೨೨ + ೨೨ + ೧).$$

ಉ. ೬. ಯ^೨ - ೬೪ಯ^೨ - ೨೬. ಇಲ್ಲಿ - ೬೪ ರ = ೮ ಮತ್ತು - ೨೪ ಹೀಗೆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$ರಾಶಿಮು = ಯಃ - \frac{೬೪}{ಯಃ} - ೮ - ೨೪$$

$$\begin{aligned} &= (ಯಃ + (-\frac{೪}{ಯಃ})^2 + (-೨)^2 - ೨ಯಃ(-\frac{೪}{ಯಃ})(-೨) \\ &= (ಯಃ - \frac{೪}{ಯಃ} - ೨) (ಯಃ + \frac{೪}{ಯಃ} + ೪ + ೪ - ೨ಯಃ + ೨ಯಃ) \\ &= (ಯಃ - ೨ - \frac{೪}{ಯಃ}) (ಯಃ + ೨ಯಃ + ೮ - \frac{೪}{ಯಃ} + \frac{೪}{ಯಃ}). \end{aligned}$$

ಉ. ೨. (ಯ + ರ - ಲ)² + (ರ + ಲ - ಯ)² + (ಲ + ಯ - ರ)²
- ೨(ಯ + ರ - ಲ)(ರ + ಲ - ಯ)(ಲ + ಯ - ರ) ಕ್ಕೆ (ಯ + ರ + ಲ)
ದಿವ್ಯ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಏನು ಬರುವದು ?

$$\begin{aligned} \text{ಭಾಗ್ಯ} &= \frac{೧}{೨} \{ (ಯ + ರ - ಲ) + (ರ + ಲ - ಯ) + (ಲ + ಯ - ರ) \} \\ &\times [\{ (ಯ + ರ - ಲ) - (ರ + ಲ - ಯ) \}^2 + \\ &\{ (ರ + ಲ - ಯ) - (ಲ + ಯ - ರ) \}^2 \\ &+ \{ (ಲ + ಯ - ರ) - (ಯ + ರ - ಲ) \}^2] \\ &= \frac{೧}{೨} (ಯ + ರ + ಲ) \{ (೨ಯ - ೨ಲ)^2 + (೨ರ - ೨ಯ)^2 + \\ &\quad (೨ಲ - ೨ರ)^2 \} \\ &= \frac{೧}{೨} (ಯ + ರ + ಲ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{ ೪(ಯ - ಲ)^2 + ೪(ರ - ಯ)^2 + ೪(ಲ - ರ)^2 \} \\ &= ೨(ಯ + ರ + ಲ) \{ (ಯ - ಲ)^2 + (ರ - ಯ)^2 + (ಲ - ರ)^2 \} \\ &= ೪(ಯ + ರ + ಲ)(ಯ^2 + ರ^2 + ಲ^2 - ಯರ - ರಲ - ಲಯ) \end{aligned}$$

∴ ಭಾಗಾಕಾರ = ೪(ಯ² + ರ² + ಲ² - ಯರ - ರಲ - ಲಯ)

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಗುಣ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

೧. ೮² + ೯² - ೧೫² + ೩೮ಕಗ. ೨. ೮² - ೮² - ೧೫² - ೩೮ಕದನ.

ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ರಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು
ಸಂಗತಿಗಳು

೧.

ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ

೩.೧. ಮುಂದಿನ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ನಾವು ಲಕ್ಷ್ಯಕರವಾಗಿ
ಅಭ್ಯಸಿಸುವಾ.

ಯ—ಪ(ಅಯಿ + ಕಯಿ + ಗಯ + ಫ) [ಅಯಿ + ಯ(ಅಪ + ಕ)
ಅಯಿ—ಅಪಯಿ + (ಅಪಿ + ಕಪ + ಗ)

(ಅಪ + ಕ)ಯಿ + ಗಯ

(ಅಪ + ಕ)ಯಿ — (ಅಪಿ + ಕಪಿ)

(ಅಪಿ + ಕಪ + ಗ)ಯ + ಫ

(ಅಪಿ + ಕಪ + ಗ)ಯ — (ಅಪಿ + ಕಪಿ + ಗಪ)

ಅಪಿ + ಕಪಿ + ಗಪ + ಫ

ಇಲ್ಲಿ ಭಾಷ್ಯ[ಮೂಲ ರಾಶಿಯು ಮತ್ತು ಶೇಷ ಇವುಗಳಿಗಿಂತ ಕೋಡಿ-
ವರೆ ನಮಗೆ ಕುಪುಬರುವವೇನೆಂದರೆ ಭಾಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಯ ಎಂಬ ಒಂದಾಗಿ ಪ
ಇಷ್ಟರೇ ಯಾವ ರಾಶಿಯು ಬರುವದೋ ಅದೇ ಶೇಷವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಇದರ
ಮೇಲಿಂದ ಹೊರಡುವ ನಿಷ್ಕರ್ಷವೇನೆಂದರೆ ಯ ಇಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ
ವರ್ಗದ ಭಿನ್ನ ಘಾತಗಳಿಂದಾದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ್ರಥಮ ಘಾತದ ಪದದ ಸಹ
ಗುಣಕವಾಗಿ ಇರುವಂಥ ಅದೇ ವರ್ಗದ, ಯ — ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ, ಪ್ರಥಮ
ಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಎಷ್ಟೆಂದುದನ್ನು ಸ್ವೇ ಸಮನೆ
ನೋಡುವದಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸ ಭಾಷ್ಯದಲ್ಲಿ
ಯ ಎಂಬ ಬದಲಾಗಿ ಪ ವನ್ನು ಇಷ್ಟರೇ ಶೇಷವನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರಬೇಕು. ಇದರ
ತಾಳೆಯನ್ನು ಮುಂದೆ ಒದಿಸಿರಲು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು
ನೋಡುವಾ.

$2\text{ಕ್ಷ}^2 + 2\text{ಕ್ಷ}^1 - 4\text{ಕ್ಷ} + 3$ ಇವಕ್ಕೆ $\text{ಕ್ಷ} - 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವು ಸಮಗ್ರ ಜೀಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ,

$$\begin{array}{r} \text{ಕ್ಷ} - 2 \) \ 2\text{ಕ್ಷ}^2 + 2\text{ಕ್ಷ}^1 - 4\text{ಕ್ಷ} + 3 \ (\ 2\text{ಕ್ಷ}^1 + 4\text{ಕ್ಷ} + 8 \\ \underline{2\text{ಕ್ಷ}^2 - 4\text{ಕ್ಷ}^1} \\ 6\text{ಕ್ಷ}^1 - 4\text{ಕ್ಷ} \\ \underline{6\text{ಕ್ಷ}^1 - 8\text{ಕ್ಷ}} \\ 12\text{ಕ್ಷ} + 3 \\ \underline{12\text{ಕ್ಷ} - 24} \\ 27 \end{array}$$

ಈಗ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕ್ಷ ದ ಬದಲಾಗಿ ೨ ಇಟ್ಟರೆ ಭಾಜ್ಯದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$\text{ಕ್ಷ} = 2 \text{ ಇದ್ದರೆ ಭಾಜ್ಯವು} = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 - 4 \cdot 2 + 3$$

$= 8 + 4 - 8 + 3 = 7$. ಬೇರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಇದೇ ಶೇಷ ಬಂದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

೩.೨. ಈಗ ಇದು ಒಳಗೆ ಏಕೆ ಆಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಸಮಗ್ರ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಗೊತ್ತೇ ಇದೆ.

ಭಾಜಕ) ಭಾಜ್ಯ (ಭಾಗಾಕಾರ

.....

ಶೇಷ

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ \times ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಇದೊಂದು ನಿತ್ಯಸಮ ವಿರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $2\text{ಕ್ಷ}^2 + 2\text{ಕ್ಷ}^1 - 4\text{ಕ್ಷ} + 3 = (\text{ಕ್ಷ} - 2) \times \text{ಭಾಗಾಕಾರ} + \text{ಶೇಷ}$. ಕ್ಷ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವಿರುತ್ತದೆ. ಕ್ಷ ದ ಬೆಲೆಯು ೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 - 4 \cdot 2 + 3 = (2 - 2) \times \text{ಭಾಗಾಕಾರ} + \text{ಶೇಷ} = 0 \times \text{ಭಾಗಾಕಾರ} + \text{ಶೇಷ}$.

$$\therefore \text{ಶೇಷ} = ೨.೩ + ೭.೩ - ೪.೩ + ೫ \\ = ೫ + ೬ - ೧ + ೫ = ೧೧.$$

ಇದರಂತೆಯೇ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಅಯ^೩ + ಕಯ^೩ + ಗಯ + ಘ = (ಯ - ಪ) × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಯ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವಿರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟರೆ,
 ಅಪ^೩ + ಕಪ^೩ + ಗಪ + ಘ = (ಪ - ಪ) × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ
 = ೦ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ = ಶೇಷ.

ಈ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ವರ್ಣದ) ಘಾತಗಳಿಂದಾದ ಬೇಕಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ವನ್ನು ಇಟ್ಟು ದೊರಕಿದ ಬೆಲೆಯೇ ಯ-ಪ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಶೇಷವಿರುವದು. ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಇದರ ಉಪಯೋಗದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನುವಾಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ. ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಹೇಗೆ ಹೇಳಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೇಳೆ ಮತ್ತು ಉತ್ಸಾಹವಿದ್ದರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭಾಗಿಸಿ ತಾಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಉ. ೧. ೫ಕ್ಷ^೩ - ೪ಕ್ಷ^೩ + ೩ಕ್ಷ - ೧ ಇದನ್ನು ೬ - ೪ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು?

$$\text{ಶೇಷ} = ೫.೪ - ೪.೪ + ೩.೪ - ೧ = ೩.೦ - ೬.೪ + ೮ - ೧ = ೨.೬.$$

ಉ. ೨. ೩ಕ್ಷ^೩ + ೨ಕ್ಷ^೩ - ೫ಕ್ಷ - ೬ ಇದನ್ನು ೬ + ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು? ಇಲ್ಲಿ ಭಾಜಕ = ೬ + ೨ಕ್ಷ - (೨). ಅದುದರಿಂದ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ೬ ದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ -೨ನ್ನು ಇಡಬೇಕು.

$$\therefore \text{ಶೇಷ} = ೩(-೨) + ೨(-೨) - ೫(-೨) - ೬ = -೨.೪ + ೮ + ೧೦ - ೬ = ೧೧.$$

ಇಲ್ಲಿ ೬ ದ ಬದಲಾಗಿ -೨ನ್ನು ಏಕೆ ಇಡಲಿಕ್ಕೆಬೇಕು ಎಂಬುದು ಮುಂದಿನ ವಿವೇಚನೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು. ೩ಕ್ಷ^೩ + ೨ಕ್ಷ^೩ - ೫ಕ್ಷ - ೬

$= (ಕ್ಷ+೨) \times$ ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $ಕ್ಷ+೨$
 $= ೦$ ಇದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ $ಕ್ಷ = -೨$ ಇರುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ
 $(ಕ್ಷ+೨) \times$ ಭಾಗಾಕಾರ ಈ ಭಾಗವು ಇಲ್ಲದ ಹಾಗೆ ಆಗಿ ಅಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಮಾತ್ರ
 ಉಳಿಯುವದು. ಆ ಮೇಲೆ ಶೇಷವು $೩(-೨)^೩ + ೨(-೨)^೨ - ೫(-೨) - ೬$
 ಇರುವದು.

ಆದುದರಿಂದ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವ ಸಮಯ -
 ದಲ್ಲಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಮುಖ್ಯ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಭಾಷಕ ರಾಶಿಯು-
 ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಆದಮೇಲೆಗಿನ ವರ್ಗದ ರೂಪ ಬೆಲೆಯು
 ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ಆ ವರ್ಗದ ಬದಲಾಗಿ ಭಾಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು.

ಉ. ೩. $೨ನೇ - ೧ನೇ + ೨ನೇ + ೪ನೇ + ೩$ ಇದನ್ನು $೧+೩$ ಇದರಿಂದ
 ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವೆಷ್ಟು?

$$\begin{aligned} \text{ಶೇಷ} &= ೨(-೩)^೪(-೩)^೩ + ೨(-೩)^೨ + ೪(-೩) + ೩ \\ &= ೧೬೨ + ೨೭ + ೧೮ - ೧೨ + ೩ = ೧೯೦. \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಶೇಷವೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧. ೪ ಅನಿ - ೫ ಅನಿ - ೭ ಅನಿ + ೩ ಭಾಗಲೆ ಅ - ೨ .
೨. ೩ ಅನಿ - ೨ ಅನಿ + ೪ ಅನಿ - ೫ ಭಾಗಲೆ ಅ + ೨ .
೩. ೮ ಕ್ಷನಿ - ೪ ಕ್ಷನಿ + ೩ ಕ್ಷನಿ - ೭ ಭಾಗಲೆ ಕ್ಷ + ೩ .
೪. ೯ ಯನಿ - ೨ ಯನಿ + ೩ ಯನಿ + ೪ ಭಾಗಲೆ ಯ - ೩ .
೫. ೬ ಕ್ಷನಿ - ೨ ಕ್ಷನಿ - ೬ ಕ್ಷನಿ + ೫ ಕ್ಷನಿ - ೧ ಭಾಗಲೆ ಕ್ಷ - ೪ .
೬. ೪ ಯನಿ - ೪ ಯನಿ + ೬ ಯನಿ + ೨ ಭಾಗಲೆ ಯ - ೨ .
೭. ೪ ವನಿ - ೨ ವನಿ + ೫ ವನಿ - ೧೮ ಭಾಗಲೆ ವ + ೪ .
೮. ೨ ಕ್ಷನಿ + ೪ ಕ್ಷನಿ - ೨ ಕ್ಷನಿ + ೩ ಭಾಗಲೆ ಕ್ಷ + ೨ .
೯. ೮ ರನಿ + ೨ ರನಿ - ೪ ರನಿ - ೧ ಭಾಗಲೆ ರ - ೫ .
೧೦. ೨ ಅನಿ - ೨ ಅನಿ - ೧೦ ಅನಿ + ೩ ಭಾಗಲೆ ಅ + ೫ .

ಸುಬೋಧ ಜೀಜಗಣಿತ

೨.

ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತ

೩.೨. ಮೇಲೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವೇನೆಯು-
ದನ್ನು ನಾವು ಈಗ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ.

ಯೌ—೧೦ಯೌ+೨೧ಯ—೨೦ ಇದನ್ನು ಯ—೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ
ಶೇಷವೆಷ್ಟು? ಶೇಷ=ಯ ದ ಬದಲಾಗಿ ೨ ಹಿಡಿದು ಬರುವ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು=
೨೨—೧೦=೧೨+೨೧೨—೨೦=೪—೪೦+೬೨—೨೦=೦ ಶೇಷವು ಏನೂ
ಇಲ್ಲವೆಂದು ರಾಶಿಗೆ ಯ—೨ ರಿಂದ ಶೇಷವಿಲ್ಲದೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು,
ಅಂದಕೆಯೇ ಯ—೨ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು. ೨ ರಿಂದ
ಗುಣಕ್ಕೆ ನೀಶೇಷ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು, ೨ ಇದು ಗುಣ ರ ಒಂದು ಗುಣಕ-
ವಿರುವದೆಯೇ ಇದರ ಅರ್ಥವು. ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ೪ ರಿಂದ ಗುಣಕ್ಕೆ ನೀಶೇಷ
ವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ. ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು ಉಳಿಯುವದು. ಇದರ
ಅರ್ಥವೇನೆಯದೆ. ೪ ಇದು ಗುಣ ರ ಗುಣಕವಲ್ಲ. ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ
ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಏಕಕಾಂತ ದ್ವಿಸದಿಯು ಕೊಟ್ಟ
ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೂ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬರುವದು.
ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದರಿಂದ ಯ—೨ ಇದು
ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆ ಎಂದು ಸಂಶ್ಲೇಷವಿಲ್ಲದೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ವಿರುದ್ಧ
ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಯ—೬ ಇದು ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೇ ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ
ಯ—೬ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು=೬೪-೧೦೬೨+೨೧೬ ೨೦ ೨೧೬-
೨೬೦+೧೦೬-೨೦=೧೨ ಇರುವದರಿಂದ ರಾಶಿಗೆ ಯ—೬ ರಿಂದ ನೀಶೇಷ
ವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಆದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ ಎಂದು ಸಹ
ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

೩.೪. ಒಂದು ಗುಣಕವು ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳುವದು
ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಿರುವದು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯ—೨ ಇದು ಒಂದು
ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಕಾರಣ ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಗುಣಕಾಂಶ
ನೊಂದಲನೆಯ ಗುಣಕವು ಯ—೨ ಬರುವಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರಾಶಿ-
ಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಉ. ೧—೧೦೦೦ + ೩೦೦ — ೩೦

= ೧೦೦ — ೨೦೦ — ೨೦೦ + ೧೩೦ + ೧೫೦ — ೩೦

= ೧೦೦(೧೦ — ೨) — ೨೦೦(೧೦ — ೨) + ೧೫೦(೧೦ — ೨)

= (೧೦ — ೨)(೧೦೦ — ೨೦೦ + ೧೫೦)

= (೧೦ — ೨)(೧೦ — ೨)(೧೦ — ೫).

ಪ್ರ. ೫. ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ವಿವೇಚನೆಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದೇನೆಂದರೆ ಯದ (ಇಲ್ಲವೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆಬೇರೆ ಘಾತಕಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯದ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಇಟ್ಟು ಅದರ ಜೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಯ — ಪ ದಿಂದ ನೀಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಹೋಗುವದು, ಅಂದರೆಯೇ ಯ — ಪ ಇದು ಅದರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವದು.

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಿದೆ.

ಉ. ೧. ೨೦೦ — ೧೦೦೦ + ೨೨೦ + ೧೫ ಇದರ ಸ್ವ — ೩ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವದೋ? ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಯ ಬೇರೆ ಗುಣಕಗಳಾವವು?

ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ೩ ಇಟ್ಟರೆ,

ರಾಶಿಯು = ೨೦೦ — ೧೦೦೦ + ೨೨೦ + ೧೫ = ೧೦೦ + ೨೨ + ೧೫

= ೩೦, ಇದುವರಿಂದ ಸ್ವ — ೩ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿದ್ದರೇಕೆ?

ಇಷ್ಟು ಆದ ಮೇಲೆ ಸ್ವ — ೩ ಈ ಮೂವರನ್ನೇ ಗುಣಕ ಬರುವಂತೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಾರಿ. ಆದರೆ ಇವು ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೨೦೦ — ೧೦೦೦ + ೨೨೦ + ೧೫

= ೨೦೦ — ೨೦೦ — ೨೦೦ + ೨೨೦ — ೨೦೦ + ೧೫

= ೨೦೦(೨ — ೩) — ೨೦೦(೨ — ೩) — ೨(೨ — ೩)

= (೨ — ೩)(೨೦೦ — ೨೦೦ — ೨)

= (೨ — ೩)(೨ — ೩)(೨೦ + ೧).

ಉ. ೨. ೫ + ೫ — ೧೫ ೩೦ ಇದರಲ್ಲಿ ೫ + ೨ ಗುಣಕವಿರುವದೋ? ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ರಾಶಿಯು ೫ + ೨ ಇದರ ಗುಣಕವಾಗುವವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಗುಣ ಪೃಥಕ್ ರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ.

ಕ್ಷದ ಬದಲಾಗಿ —೨ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು $= (-೨^೩) + (-೨)^೩ - ೧೪(-೨) - ೩೦ = -೮ + ೪ + ೨೮ - ೩೦ = -೬$ ಅಂದರೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕ್ಷ+೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು -೬ ಉಳಿಯುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಕ್ಷ+೨ ಇದು ಅದರ ಗುಣಕವಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಅಂದರೆ ಕ್ಷ+೨ ಇದು ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ೬ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ

$$\begin{aligned} \text{ಕ್ಷ}^೩ + ೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೪\text{ಕ್ಷ} - ೩೦ + ೬ &= \text{ಕ್ಷ}^೩ + \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೪\text{ಕ್ಷ} - ೨೪ \\ &= \text{ಕ್ಷ}^೩ + ೨\text{ಕ್ಷ}^೨ - \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೨\text{ಕ್ಷ} - ೧೨\text{ಕ್ಷ} - ೨೪ \\ &= \text{ಕ್ಷ}^೩ (\text{ಕ್ಷ} + ೨) - \text{ಕ್ಷ}^೨ (\text{ಕ್ಷ} + ೨) - ೧೨(\text{ಕ್ಷ} + ೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ} + ೨)(\text{ಕ್ಷ}^೩ - \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ} + ೨)(\text{ಕ್ಷ} + ೩)(\text{ಕ್ಷ} + ೪). \end{aligned}$$

ಉ. ೩ ಯ^೩ - ೭ಯ + ಕ ಇದರಲ್ಲಿ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಯ - ೨ ರಿಂದ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು ?

ರಾಶಿಯನ್ನು ಯ - ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು $= ೨ - ೭.೨ + ಕ = ೪ - ೧೪ + ಕ = -೧೦ + ಕ$. ಕ ದ ಬೆಲೆಯು ೧೦ ಇದ್ದರೆ ಈ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯವಿರುವದು, ಅಂದರೆ ಯ - ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದು.

[ತಾಳೆ: ಯ^೩ - ೭ಯ + ೧೦ = (ಯ - ೨)(ಯ - ೫).]

ಉ. ೪. ಆ ಮತ್ತು ಕ ಇವುಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದರೆ ೨ಯ^೩ - ೧೧ಯ^೨ + ೨ಯ + ಕ ಕ್ಕೆ ಯ - ೩ ಮತ್ತು ಯ - ೪ ಈ ಎರಡರಿಂದಲೂ ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು ?

ಯ - ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು $= ೨.೩^೩ - ೧೧.೩^೨ + ೨.೩ + ಕ = ೫೪ - ೯೯ + ೬.೩ + ಕ = ೩.೩ + ಕ - ೪೫$.

ಯ - ೪ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು $= ೨.೪^೩ - ೧೧.೪^೨ + ೨.೪ + ಕ = ೧೨೮ - ೧೭೬ + ೮.೮ + ಕ = ೪.೮ + ಕ - ೪೮$.

∴ ಯ - ೩ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ೩.೩ + ಕ - ೪೫ = ೦, ಅಂದರೆ ೩.೩ + ಕ = ೪೫. (೧)

ಮತ್ತು ಯ - ೪ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ೪.೮ + ಕ - ೪೮ = ೦ ಅಂದರೆ

ಅ+ಕ=ಅಲ, (೨) ಇರಲೇಬೇಕು. ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ
 $ಅ=೩$ ಮತ್ತು $ಕ=೩$ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಗೆ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗುವ
 ದೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ನೋಡಲನೆಯ
 ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು ಗುಣಕವಿರುವದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು
 ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ ನೋಡಲನೆಯ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ-
 ವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು
 ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅದು ಗುಣಕವಿರುವದು ಎಂಬುದನ್ನು
 ಹೇಳಿರಿ. ತರುವಾಯ ದೊಸ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಯ^೩—೮ಯ^೩—೪ಯ^೩+೬ಯ^೩+೨.
೨. ಅನ^೩—೧೬ನ^೩+೯ನ^೩+೯ನ^೩—೩.
೩. ೩ಕ್ಷ^೩—೧೬ಕ್ಷ^೩+೨೩ಕ್ಷ^೩—೬;ಕ್ಷ^೩—೩.
೪. ನ^೩—೩ನ^೩—೩ಅನ^೩+೧೦೦ನ^೩—೪.
೫. ಯ^೩+೫ಯ^೩—೨ಯ^೩—೨೦ಯ^೩+೪.
೬. ಅರ^೩—೮ರ^೩—೫ರ^೩—೪೦ರ^೩—೫.
೭. ೫ಕ್ಷ^೩+೨೩ಕ್ಷ^೩+ಕಕ್ಕೆಕ್ಷ^೩—೮ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಕ=?
೮. ೧೦ಯ^೩—೨೧ಯ^೩+ಅಯ^೩+೪ಕ್ಕೆಯ^೩—೨ ರಿಂದ ಭಾಗ
 ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ, ಅ=?
೯. ೩ನ^೩—೮ನ^೩+ಅನ^೩+ಕಕ್ಕೆನ^೩+೪ ಮತ್ತು ನ—೩ ರಿಂದ ಭಾಗ
 ಹೋಗಬೇಕಾದರೆ ಅ=? ಕ=?
೧೦. ೩ಕ್ಷ^೩+೬ಕ್ಷ^೩—೪೦ಕ್ಷ^೩+೮ಕ್ಷ^೩+ಕಕ್ಕೆಕ್ಷ^೩—೨, ಕ್ಷ^೩+೩ ರಿಂದ
 ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ=? ಕ=?
೧೧. ಪ^೩+ಅಪ^೩—೪೯ಪ^೩+ಕಪ^೩+೬೦ಕ್ಕೆಪ^೩—೪, ಪ—೫ ರಿಂದ
 ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ=? ಕ=?
೧೨. ಅಯ^೩+೪ಯ^೩+ಕಯ^೩+೩೨ಯ^೩—೧೫ಕ್ಕೆಯ^೩—೧,
 ಯ^೩+೫ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ=? ಕ=?

೩.

ಕೆಲವು ಗುಣಕ ನಿಯಮಗಳು ಮತ್ತು ಒಹುಪದಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ
 $\dots \dots = (ಯ-೧)(\dots)$; $\dots \dots = (ಯ+೧)(\dots)$; $\dots \dots = \dots (\dots)$
 ೩.೬. ಮೇಲೆ ವಿವೇಚಿಸಿದ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ ಗುಣಕ-
 ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಮಗ್ರ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲು ಬರುವುದು. ಅವು
 ಹೀಗೆ ಎಂದರೆ ಅಯಿ + ಕಯಿ + ಖಯಿ + ಗಯಿ + ಘ ವಂಘ ಯಾವು -
 ದಾದರೊಂದು ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ ಯ-ಪ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ವ
 ಒದಲಾಗಿ ಸ ಉಳ್ಳ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು.
 ಅವರಂತೆಯೇ ಯ-೧ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಯ=೧ ಎಂದು ತಿಳಿದು
 ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಈಗ ಯ=೧ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ
 ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ+ಕ+ಖ+ಗ+ಘ ಅಗುವುದು. ಅದುವರಿಂದ ಅ+
 ಕ+ಖ+ಗ+ಘ=೦ ಇದ್ದರೆ ಯ=೧ ಇದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವುದು.
 ಮತ್ತು ಅ,ಕ,ಖ,ಗ, ಘ ಇವು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ವ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿವೆ.
 (ಘ ಅಂದರೆ ಘಯ, ಅಂದರೆ ಘ ಇದು ಯ ವ ಸಹ ಗುಣಕವಿರುವುದು
 ತಿಳಿದುಬಹುದು.) ಅದುವರಿಂದ,

ಯ ವ (ಇಲ್ಲಿಯೇ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವಸ್ತುವು) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತ-

ಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ವ ಎಲ್ಲ

ನಿಯಮ ೧.

ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು

ಶೂನ್ಯವಿದ್ದರೆ ಯ=೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕ-

ವಿರುವುದು, ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಇರುವದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಲಕ್ಷ್ಯ-೬ಕ್ಷ-೩ಕ್ಷ+೨೧ ಇದರಲ್ಲಿ ಲ-೬-೩
 +೨೧=೦, ಅದುವರಿಂದ ೬-೧ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರ-
 ಲಿರಬೇಕು. ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣ-
 ಕ್ಷಗಳ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವುದು.

$$ಲಕ್ಷ್ಯ-೬ಕ್ಷ-೩ಕ್ಷ+೨೧$$

$$= ಲಕ್ಷ್ಯ-೬ಕ್ಷ+೩ಕ್ಷ-೩ಕ್ಷ-೨೧ಕ್ಷ+೨೧$$

$$= ಲಕ್ಷ್ಯ(ಕ್ಷ-೧)+೩ಕ್ಷ(ಕ್ಷ-೧)-೨೧(ಕ್ಷ-೧)$$

$$= (\kappa - 1)(\alpha\kappa^2 + \alpha\kappa - \alpha)$$

$$= (\kappa - 1)(\alpha\kappa - 1)(\alpha\kappa + 1).$$

೩. ೭. ಈಗ $\alpha\gamma^2 + \kappa\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^2 + \phi$ ಇವರಲ್ಲಿ $\gamma^2 + 1$ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಜಿಲ್ಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದು ; ಮತ್ತು ಯದ ಬದಲಾಗಿ ೧ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಜಿಲ್ಲೆಯು $\alpha(-1)^2 + \kappa(-1)^2 + \beta(-1)^2 + \gamma(-1) + \phi$, ಅಂದರೆ $\alpha - \kappa + \beta - \gamma + \phi$ ಆಗುವದು.. ಆದರಂತೆಯೇ $\gamma + 1$ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, $\alpha - \kappa + \beta - \gamma + \phi = 0$. ಅಂದರೆ $\alpha + \beta + \phi = \kappa + \gamma$.

ಇಲ್ಲಿ $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ ಇವು ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿದ್ದು, ಈಗ ಇವು ಬಿಡುವು ಘಾತಗಳ ಸಹ ಗುಣಕಗಳಿರುವವು. ಇವರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿರ್ಧಾರವು ಹೊರಹಿಡಿಯಿತು.

ಯದ (ಇಲ್ಲಿವೇ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವರ್ಣದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ

ನಿಯಮ ೨. ಘಾತಕಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು

ಮತ್ತು ನಿಷಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಇವು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ $\gamma + 1$ ಇದು ಆ ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಇರದಿದ್ದರೆ ಅದು ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಬುದ್ಧಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$\alpha\kappa^2 - 1, \alpha\kappa^2 + \alpha\kappa - 1$ ಇವರಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ೧, ೦, ೧, ಮತ್ತು ಬಿಡುವು ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು $= 1 + 1 = 2$ ಇರುವುದರಿಂದ $\kappa + 1$ ಇದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿದ್ದಿರಬೇಕು. ಇದು ತಿಳಿದುಹೋದಂತೆಯೇ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$\alpha\kappa^2 + \alpha\kappa^2 + \alpha\kappa - 1$$

$$= \alpha\kappa^2 + \alpha\kappa^2 + \alpha\kappa^2 + \alpha\kappa - 1, \alpha\kappa - 1$$

$$= \alpha\kappa^2(\kappa + 1) + \alpha\kappa(\kappa + 1) - 1(\kappa + 1)$$

$$= (\kappa + 1)(\alpha\kappa^2 + \alpha\kappa - 1)$$

$$= (\kappa + 1)(\alpha\kappa - 1)(\alpha\kappa + 1).$$

೩.೮. ಆಯಃ + ಕಯಃ + ಖಯಃ + ಗಯಃ + ಘಃ ರಾಶಿಯ ನಯ + ಪ ಈ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಯ ದ ಯಾವುವೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದರೂ ಅದು ಅದರ ಗುಣಕ ವಿರುವದು. ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ೧ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಆಯಃ + ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಅಂದರೆ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುವದು. ಮತ್ತು ನಯ + ಪ ದ ಬೆಲೆಯು ನ + ಪ ಇರುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವಜೇನೆಂದರೆ, ನಯ + ಪ ದಂತಹ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಆಯಃ + ಕಯಃ + ಖಯಃ + ಗಯಃ + ಘಃ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ನ + ಪ ಇದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಗುಣಕವಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆಯೇ ಆ ಬೇರೀಜಿಗೆ (ಅ + ಕ + ಖ + ಗ + ಘ ಕೈ)ನ + ಪ ದಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಇದ್ದರೆಯೇ ನಯ + ಪ ಈ ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಬಂಧವು. ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಅದುದರಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಮಹತ್ವದ ನಿಯಮವು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಯ ದ (ಇಲ್ಲವೇ ಬೇರೆ ಯಾವದೇ ವರ್ಗದ) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿಗೆ ನಯ + ಪ ದಂತಹ ಯಾವ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿಪದಿಯಲ್ಲಿಯ

ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗು-

ನಿಯಮ ೩. ವದೋ ಅದೇ ದ್ವಿಪದಿಯು ಆ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕ-ವಿರುವ ಸಂಬಂಧವು, ಬೇರೆ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ.

ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣಕ್ಕಾಗಿ ಈ ನಿಯಮವು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡುವಾ.

ಉ. ೧. ಯಃ + ಖಯಃ — ೨ಯಃ — ೨೪ ಈ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪುರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು $\neq ೦$, ಅದುದರಿಂದ ಯ — ೧ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು \neq ವಿವಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು, ಅದುದರಿಂದ ಯ + ೧ ಇದಾದರೂ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಪದ ೨೪ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಯವಗಳು ೨, ೩, ೪....ಇರುವವು. ಅದುದರಿಂದ ರಾಶಿಯ ಯ + ೨, ಯ — ೨, ಯ + ೩, ಯ — ೩, ಯ + ೪, ಯ — ೪ ಹೀಗೆ ಅವಯವಗಳು

ಸಂಭವಿಸುವವು. ಈಗ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪರಿಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಾಡುವಾ.

ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಕ ಬೇರೀಜು — ೨೦ ಇರುತ್ತದೆ. ಯ+೨ ರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಕ ಬೇರೀಜು ೩-೨೦ ಕ್ಕೆ ೩ ರಿಂದ ಭಾಗ-ಹೋಗುವದಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೨ ಇದು ಅನಯವನಿರಲಾರದು.

ಯ-೨ ರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು-೧ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವದು ಸಂಭಂಧವಿದೆ. ಇದ್ದರೆ ಯ=೨ ಹಿಡಿದು ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರಬೇಕು. ಅದು ಇದೆಯೇ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಯ=೨ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು=೨^೩+೫.೨-೨.೨-೨೪=೮+೨೦-೪-೨೪=೦. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಯ-೨ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಗುಣಕವು ಯ+೩ ಇರಬಹುದೆ? ಇಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಕ ಬೇರೀಜು ೪. ೪ರಿಂದ-೨೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಯ+೩ ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ಇದ್ದರೆ ಯ = -೩ ಎಂದು ಹಿಡಿದು ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಅದು ಆಗುತ್ತದೆಯೇ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಯ=-೩ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು = (-೩)^೩+೫(-೩)^೨-೨(-೩)-೨೪=-೨೭+೪೫+೬-೨೪=೦. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಯ+೩ ಇದೊಂದು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿದೆ.

ಈಗ ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಘಾತವಿದ್ದುದರಿಂದ ಯ-೫ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಮೂರೇ ಗುಣಕಗಳಿರುವದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಗುಣಕ ಯ-೨ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಯ+೩ ಇದ್ದು ರಾಶಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಯ^೩ ಇದ್ದು ಕೊನೆಯದು-೨೪ ಇರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳಿಂದ ಮೂರನೆಯದು ಯ+೪ ಇದೇ ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಇದರ ಹೊರತು ಬೇರೆ ಇರಲಾರದು. ಅದೇ ಇದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಪಾತ್ರಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ=-೪ ಹಾಕಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಯ = -೪ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು = (-೪)^೩+೫(-೪)^೨-೨(-೪)
-೨೪=-೬೪+೮೦+೮-೨೪=೦.

$$\therefore \text{ಯ}^4 + \text{ಉಯ}^3 - \text{೨ಯ}^2 - \text{೨೪} = (\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೪).$$

ಮೇಲಿನ ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ರಾಶಿಯ ಒಂದು ಗುಣಕವು ತಿಳಿದನಂತರ ಮೇಲಿನಂತೆ ದೀರ್ಘಪಾದ ಮತ್ತು ಪೇಳಿಯು ಬದಲೆ ತಗಲುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸದೇ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬಡಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲವೂ, ಸುಲಭವೂ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಯ ೨ ಇಮ್ಮೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದ ಕರುಣಾಯ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned} & \text{ಯ}^4 + \text{ಉಯ}^3 - \text{೨ಯ}^2 - \text{೨೪} \\ &= \text{ಯ}^3 - \text{೨ಯ}^3 + ೨\text{ಯ}^3 - ೧೪\text{ಯ} + ೧೨\text{ಯ} - \text{೨೪} \\ &= \text{ಯ}^3(\text{ಯ} - ೨) + ೨\text{ಯ}(\text{ಯ} - ೨) + ೨\text{ಯ}(\text{ಯ} - ೨) \\ & \quad + ೧೨(\text{ಯ} - ೨) \\ &= (\text{ಯ} - ೨)(\text{ಯ}^3 + ೨\text{ಯ} + ೧೨) \end{aligned}$$

[ಈ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿದುದೇನೇನೋ ಹೇಳಲು ಬರುವದು]

$$= (\text{ಯ} - ೨)(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೬).$$

ಉ.೨. $೬x^4 - ೧೫x^3 - ೨೫x^2 - ೪x + ೧೨$ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಪ್ರಥಮಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣಿಪು, ಅದುದರಿಂದ $x^2 - ೧$ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ.

ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣಿಪು (-೨೧) ಏನು ಏನು ಪಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣಿಪು (-೯) . ಅದುದರಿಂದ $x^2 + ೧$ ಇದು ಗುಣಕವಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಸಂಭವನೀಯ ಗುಣಕಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದೊಂದುರ ಪೂರ್ಣಕವನ್ನು ಕೂಡುವಾ. $x^2 + ೨$ ಇರುವುದೇ? ಇದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೀರ್ಣಿಪು .. ರಾಶಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೃಹತ್ ಜೀರ್ಣಿಪು -೨೦ , ಇದಕ್ಕೆ ೨ ರಿಂದ ರಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದೇನೇನು $x^2 + ೨$ ಇದು ಗುಣಕವಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. -೨ ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಜೀರ್ಣಿಪು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$$\begin{aligned} \text{ಕ್ಷ} &= -೨ \text{ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು} \\ &= ೬(-೨)^೨ - ೨೯(-೨) - ೪(-೨) + ೧೨ \\ &= ೨೪ + ೫೮ - ೧೧೬ + ೮ + ೧೨ = ೦. \end{aligned}$$

ಆದುದರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ}+೨$ ಇವೊಂದು ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತ. ಇದರಂತೆಯೇ ಮುಂದೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\text{ಕ್ಷ}-೨$, $\text{ಕ್ಷ}+೩$, $\text{ಕ್ಷ}-೩$ ಇವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದರೆ $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ಮತ್ತು $\text{ಕ್ಷ}+೩$ ಇವು ಗುಣಕಗಳೆರಬೇ $\text{ಕ್ಷ}-೩$ ಇದು ಇರುವದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ರಾಶಿಯು

$$\begin{aligned} &= ೬\text{ಕ್ಷ}^೨ + ೧೨\text{ಕ್ಷ} - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೨೪\text{ಕ್ಷ} - ೫\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೦ + ೬\text{ಕ್ಷ} + ೧೨ \\ &= ೬\text{ಕ್ಷ}^೨(\text{ಕ್ಷ}+೨) - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨(\text{ಕ್ಷ}+೨) - ೨೪\text{ಕ್ಷ}(\text{ಕ್ಷ}+೨) + ೬(\text{ಕ್ಷ}+೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(೬\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೨೪\text{ಕ್ಷ} + ೬) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(೬\text{ಕ್ಷ}^೨ - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨ + \text{ಕ್ಷ}^೨ - ೨೪\text{ಕ್ಷ} - ೨\text{ಕ್ಷ} + ೬) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)\{\text{ಕ್ಷ}^೨(\text{ಕ್ಷ}-೨) + \text{ಕ್ಷ}(\text{ಕ್ಷ}-೨) - ೨(\text{ಕ್ಷ}-೨)\} \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(\text{ಕ್ಷ}-೨)(\text{ಕ್ಷ}^೨ + \text{ಕ್ಷ} - ೨) \\ &= (\text{ಕ್ಷ}+೨)(\text{ಕ್ಷ}-೨)(\text{ಕ್ಷ}+೧)(\text{ಕ್ಷ}+೨). \end{aligned}$$

ಉ.೩. $೬\text{ಕ್ಷ}^೨ + ೧೨\text{ಕ್ಷ} - ೧೭\text{ಕ್ಷ}^೨ + ೨೪\text{ಕ್ಷ} + ೫\text{ಕ್ಷ}^೨ + \text{ಕ್ಷ} - ೧೨$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ= ?, ಕ= ?.

$\text{ಕ್ಷ}+೨$, $\text{ಕ್ಷ}-೨$, $(\text{ಕ್ಷ}+೧)$, $(\text{ಕ್ಷ}+೨)$. ಆದುದರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ}+೨$, $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ರಿಂದಾವರೂ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕು. ಮತ್ತು $\text{ಕ್ಷ}+೨$ ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗಬೇಕು. ಈಗ $\text{ಕ್ಷ}-೨$ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ}=೨$ ಇದ್ದರೆಯೇ ರಾಶಿಯು=೦.

$$\therefore ೬.೨೪ + ೧೨.೨ - ೧೭.೨ + ೨೪.೨ + ೫.೨ + ೨ - ೧೨ = ೦$$

$$\therefore ೪೮ + ೧೨೯ - ೩೪ + ೨೪ + ೧೦ + ೨ = ೦$$

$$\therefore ೧೦ + ೨೪ + ೨ = ೦$$

$$\therefore ೨೪ + ೨ = -೧೦ \dots \dots \dots (೧)$$

ಹದರಂತೆಯೇ $\text{ಕ್ಷ}+೨$ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ, ಆದುದರಿಂದ $\text{ಕ್ಷ} = -೨$ ಇದ್ದರೆ ರಾಶಿಯು=೦

$$\therefore ೬(-೨)^೨ + ೧೨(-೨) - ೧೭(-೨) - ೨೪(-೨) - ೫.೨ + ೨ = ೦$$

$$\therefore ೧೫೩ - ೪೪೦ - ೧೧೬೮ - ೪೮ + ೯ = ೦$$

$$\therefore - ೮೦ - ೪೮ + ೯ = ೦$$

$$\therefore ೪೮ - ೯ = - ೮೦ \dots \dots \dots (೨)$$

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಕೂಡಿಸಿದರೆ, $೩೮ = - ೯೪$, ಅಂದರೆ $೮ = - ೧೪$,
ಮತ್ತು ಅದುದರಿಂದ $೯ = ೨೪$.

$$೮ = - ೧೪, ೯ = ೨೪.$$

೩.೯. ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಏಕಚಿಹ್ನೆವಿರುವ $೩ಯ + ೨೨ಯ + ೨೨ಯ + ೨೨ಯ + ೧೨$ ದಂತಹ ಸ್ವರೂಪದ ಯಾವು ಸೇರಾತಿಯ ಗುಣಕವು ಅಯ = ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಚಿಹ್ನೆ ಚಿಹ್ನೆ (ಒಂದರ ಚಿಹ್ನೆ + ಬೇರೊಂದರ -) ಪದಗಳಿರುವ ದ್ವಿಪದಿಯು ಇರಲಾರದು; ಅದು ಅಯ + ಗ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಏಕಚಿಹ್ನೆ ಪದಗಳೇ ಇರುವದು. ಏಕೆಂದರೆ ಅಯ = ಪ ಈ ಸ್ವರೂಪದ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ ಅಯ = ಪ, ಅಂದರೆ ಯ = ಪ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಆದರೆ ಯ ದ ಬೆಲೆಯು ಧನ (+) ಇದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ಸ್ವರೂಪದ ರಾತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಅವರೋಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಬೆಲೆಯು ಧನವಿರುವದರಿಂದ, ಎಂದಿಗೂ ಶೂನ್ಯವಿರಲಾರದು, ಆದರೆ ಅದು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಇರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ರಾತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಗುಣಕಗಳಾವವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹುಡುಕುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾತನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಕೆಳಗಿನ ರಾತಿಗಳ ಗುಣಕವ್ಯುತ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ:

೧. $೮ + ೨೮ - ೪೩೮ + ೪೦.$

೨. $೮ + ೧೧೮ + ೪೨೮ + ೩೫.$

೩. $೬೮ + ೫೮ - ೨೧೮ + ೧೦.$

೪. $೧೨೮ + ೨೨೮ + ೬೮ - ೫.$

೫. $೪೮ - ೩೮ + ೨೮ + ೧.$

೬. $೬೮ + ೧೯೮ + ೨೦೮ + ೭.$

೭. $ಕ್ಷ^4 + ೭ಕ್ಷ^3 + ೯ಕ್ಷ^2 - ೭ಕ್ಷ - ೧೦$.
೮. $೨೫ಅ^4 - ೫೦ಅ^3 + ೯ಅ^2 + ೩೨ಅ - ೧೬$.
೯. $೧೫ಯ^4 + ೭ಯ^3 - ೧೯ಯ^2 - ೭ಯ + ೪$.
೧೦. $೬ಅ^4 + ೫ಅ^3 - ೨೮ಅ^2 + ೩೭ಅ - ೧೦$.
೧೧. $೯ಕ್ಷ^4 - ೧೨ಕ್ಷ^3 - ೫ಕ್ಷ^2 + ೧೨ಕ್ಷ - ೪$.
೧೨. $ಕ್ಷ^4 - ೬ಕ್ಷ^3 - ೧೫ಕ್ಷ^2 + ೧೦೦$.
೧೩. $ಯ^4 - ೧೦ಯ^3 + ೨೫ಯ^2 - ೫೦ಯ + ೨೪$.
೧೪. $ಕ್ಷ^4 - ೬ಕ್ಷ^3 - ೬ + ೨೦$.
೧೫. $೨ನ^4 - ೧೧ನ^3 + ೧೭ನ - ೯$.
೧೬. $೪ಯ^4 - ೨೭ಯ - ೨೭$.
೧೭. $೪ನ^4 - ೭೫ನ + ೧೨೫$.
೧೮. $೬ಕ್ಷ^4 + ೧೭ಕ್ಷ^3 - ೬೫ಕ್ಷ^2 + ೪ಕ್ಷ + ೨೦$.
೧೯. $೪ಯ^4 + ೮ಯ^3 - ೭೧ಯ^2 + ೯ ಕೈಯ^3 + ೨೦ + ೬$ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೦. $೫ + ೮ನ^4 + ೮ನ^3 + ೯ನ - ೨೪ ಕೈನ^4 + ೨ನ - ೨$ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೧. $೮ನ^4 - ೧೭ನ^3 - ೨೯ನ^2 + ೯ನ + ೮ ಕೈನ^4 - ೨ನ - ೪$ ರಿಂದ
ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೨. $೮ಕ್ಷ^4 - ೧೯ಕ್ಷ^3 - ೩೭ಕ್ಷ^2 + ೬೩ಕ್ಷ + ೯ ಕೈಕ್ಷ^3 - ೨ಕ್ಷ - ೮$ ರಿಂದ
ಭಾಗ ಹೋದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.
೨೩. $೮ಕ್ಷ^4 + ೮ಕ್ಷ^3 - ೧೭ಕ್ಷ^2 + ೯ಕ್ಷ + ೯ ಕೈಕ್ಷ^3 - ೧$ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅ = ? , ಕ = ?.

೪.

೩.೧೧. ಸಮಕೋಟಿ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಘಾತ (Homogeneous) ರಾಶಿಗಳು.

ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿಯ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
ಯ + ಕ್ಷ, ಯ - ಕ್ಷ, ಸ + ಬ + ಮ, ೨ಸ + ಬ - ಮ, ಪ - ಬ + ೪ಮ,

ಪೌ + ಬೌ, ಪೌ - ಮೌ, ಏಯೌ - ಉಯೌ + ಋಯೌ, ಪೌ + ಬೌ + ಮೌ
+ ಉಯೌ + ಋಯೌ + ಉಯೌ,

ಯೌ + ರೌ + ಲೌ ಓಯರಲ, ಪೌ - ಓಪೌಬ + ಓಪೌಬ - ಬೌ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮ್ಯವು ಕಂಡು ಬರುವದೋ? ಅದು ಎಂತಹದು? ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಪ್ರಥಮ ಘಾತದವು ಇರುವವು. ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು (Degree) ಎರಡು ಇರುವವು, ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು ಮೂರು ಇರುವದು.

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಘಾತಪರಿಮಾಣವು ಒಂದೇ ಇರುವದೋ ಆ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸಮಕೋಟಿ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳು ಏಕಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು ಇದ್ದು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಯೌ + ರೌ + ಅಯರ ಇದು ಯರ ಮತ್ತು ಅ ಇವುಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಕೋಟಿ ಸಮಘಾತ ರಾಶಿ ಇರುವದು. ಆದರೆ ರಾಶಿಯು ಕೇವಲ ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ವರ್ಗಗಳದ್ದೇ ಇದ್ದು ಅ ಇದು ಯರ ದ ಒಂದು ಸದಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅದು ಸಮಘಾತವಲ್ಲ.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಘಾತ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಘಾತವೇ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋಟಿಯು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಕೋಟಿಗಳ ಬೇರಿನಷ್ಟು ಇರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

೩.೧.೨. ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಿತ (Symmetrical) ರಾಶಿಗಳು.

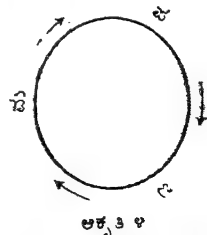
ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಯಾವ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲು ಆಗುವದಿಲ್ಲವೋ, ಆ ರಾಶಿಯು ಆ ವರ್ಗಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ

ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ ಇಲ್ಲವೆ ಸಂಮಿತವಿದೆಯೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ+ಮ, ಪ+ಮ, ಪ-ಮ+ಮ, ಏಷ+೨ಪಮ+೨ಪಮ+ಏಷ ಈ ರಾಶಿಗಳು ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಮ ಪ್ರಮಾಣವಿರುವವು. ಯ+ರ+ಲ, ಯ+ರ+ಲ, ಯರ+ರಲ+ಲಯ, ಯ+ರ+ಲ-೨ಯರಲ ಇವು ಯ,ರ,ಲ ಗಳ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣವಿರುವವು. ಅ (ಪ+ಬ+ಮ) ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ಏಕಶೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣ ರೂಪವಿದ್ದು ಅ (ಪ+ಬ+ಮ)+ಕ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ) ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಮತ್ತು ಅ (ಪ+ಬ+ಮ)+ಕ(ಪಬ+ಪಬ+ಬಮ+ಬಮ+ಮಪ+ಮಪ)+ಗಪಮ ಇದು ತ್ರಿವರ್ಣ ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಸಮಘಾತ ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅ,ಕ,ಗ ಇವು ಯಾವುದಾದರೂ ಜ್ಞಾತ ಸಹಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಿಕ ಜಿಲೆಯು ಎಷ್ಟಿದ್ದರೂ ಪ,ಬ,ಮ ಈ ಮೂರು ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡರ ಆದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ.

ಸಮಪ್ರಮಾಣ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಪ್ರಮಾಣವೇ ಇರುವದು.

೩.೧೩. ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮ ಮತ್ತು ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳು.

ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ, ಪ(ಬ-ಮ)
+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ),
ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)
+ಮ(ಪ-ಬ), ಪಬ(ಪ-ಬ)+
ಬಮ(ಬ-ಮ)+ಮಪ(ಮ-ಪ),
ಪ(ಬ+ಮ)+ಬ(ಮ+ಪ)+
ಮ(ಪ+ಬ) ದಂತಹ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಾವು



ನಿರ್ದಿಷ್ಟದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ವರ್ಣಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವವು. ಮತ್ತು ಪದ ಬದಲಾಗಿ ಬ, ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ

ಮ ಮತ್ತು ಮ ಬದಲಾಗಿ ಪ ಬದಲಾಗಿ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವನೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಹಿಂದಿನ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ ಅಕ್ಷತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಈ ವರ್ಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ವರ್ತುವ ಸುತ್ತಲೂ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಓದಿದರೆ ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವು ಒಂದರ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಬಂದಿರುವವೋ ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅವು ಬಂದಿರುವವು. ಪ ದ ನಂತರ ಬ, ಬ ದ ನಂತರ ಮ, ಮ ದ ನಂತರ ಪ, ಇದು ಅವುಗಳ ಕ್ರಮವಿರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪ, ಬ, ಮ ಈ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಂದ ಸದ್ಭವದ ಪಬ + ಬಮ + ಮಪ ಈ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಣಗಳು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವವು ಕಂಡುಬರುವವು. ಮಂಡಿಸುವ ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು ಈ ತರುವದ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳೆಂದನ್ನು ತ್ತಾರೆ. ಯಾವುದೇ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ ಒಂದು ಪದವು ತಿಳಿದರೆ ನಮಗೆ ಉಳಿದ ಪದಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೇಲೆ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಯ(ರಾ-ಮ)+....+....ಈ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೊಡದೇ ಇದ್ದ ಎರಡು ಪದಗಳು ಯಾವವು ಇರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಪದಗಳ ರಚನೆಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ರಾಶಿಯು ಯ(ರಾ-ಮ)+ರ(ಮ-ಯ)+ಪ(ಯ-ರಾ) ಇವೇ ಕೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

೩.೧೪. ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಚಕ್ರೀಯ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದರ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಉ. ೧. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ) ಇದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧ನೇ ರೀತಿ:— ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಅವಸ್ಥಾವಿಧದಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಯಾವದಾದರೊಂದು, ವರ್ತದ ಘಾತಗಳ ವಿರಳಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ಇಳಿತದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಬ}^{\circ}\text{ಮ} - \text{ಪಬ}^{\circ} + \text{ಮ}^{\circ}\text{ಪ} - \text{ಬಮ}^{\circ} \\
 &= \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) - \text{ಪ}(\text{ಬ}^{\circ}-\text{ಮ}^{\circ}) + \text{ಬಮ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})\{\text{ಪ}^{\circ}-\text{ಪ}(\text{ಬ}+\text{ಮ})+\text{ಬಮ}\} \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}^{\circ}-\text{ಪಬ}-\text{ಪಮ}+\text{ಬಮ}) \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})\{\text{ಪ}(\text{ಪ}-\text{ಬ})-\text{ಮ}(\text{ಪ}-\text{ಬ})\} \\
 &= (\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಪ}-\text{ಮ}) \\
 &= -(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ}) \quad [\because \text{ಪ}-\text{ಮ}=-(\text{ಮ}-\text{ಪ})]
 \end{aligned}$$

ಅವಯವಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವದು ಒಳ್ಳೆಯದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಹಾಗೆ ಬರೆದಿದೆ.

೨ನೇ ರೀತಿ:— ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ ದ ಬದಲಾಗಿ ಬ ಇಟ್ಟರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದಂತೆ ಪ—ಬ ಇದ್ದೊಂದು ಅವಯವವಿವೆ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಬ ದ ಬದಲಾಗಿ ಮ ಹಿಡಿದರೂ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮ—ಪ ಇವಾದರೂ ಅವಯವಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು ಇದು ಸಹಜವಿವೆ. ರಾಶಿಯು ಚಕ್ರೀಯ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಒಂದು ಅವಯವವು ಪ—ಬ ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯದು ಬ—ಮ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದು ಮ—ಪ ಇರಬೇಬೇಕು. ಈಗ ರಾಶಿಯು ಚಕ್ರೀಯ ಇದ್ದುದರಿಂದ ವರ್ಣಾತ್ಮಕ ಜೇರಿ ಗುಣಕವು ಇರಲಾರದು, ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವಿರಬಹುದು. ಅದು ಅ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ,

$$\begin{aligned}
 &\text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಬ}^{\circ}(\text{ಮ}-\text{ಪ}) + \text{ಮ}^{\circ}(\text{ಪ}-\text{ಬ}) \\
 &\equiv \text{ಅ}(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ}) \quad \text{ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು} \\
 &\text{ಇದ್ದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಜೆರಿಗಳಿಗೂ ನಿಜ ಇರುವದು.} \\
 &\text{ಪ}=೦, \text{ಬ}=೧, \text{ಮ}=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ } ೦ + ೧(೨-೦) + \\
 &೨(೦-೧) = ೨(೨-೧)(೧-೨)(೨-೦) \\
 &\therefore ೨-೦-೨ = ೨೨, \text{ ಅಂದರೆ } ೨೨ = -೨, ೨೦-೨ = -೧ \\
 &\therefore \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಬ}^{\circ}(\text{ಮ}-\text{ಪ}) + \text{ಮ}^{\circ}(\text{ಪ}-\text{ಬ}) \equiv \\
 &\quad \text{---}(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ}).
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಪಬ(ಪ^೨—ಬ^೨) + ಬಮ(ಬ^೨—ಮ^೨) + ಮಪ(ಮ^೨—ಪ^೨).
ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.

೧ನೇ ರೀತಿ:-

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಪ}^2\text{ಬ} - \text{ಪಬ}^2 + \text{ಬಮ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) + \text{ಮ}^2\text{ಪ} - \text{ಮಪ}^2 \\
 &= \text{ಪ}^2\text{ಬ} - \text{ಮಪ}^2 - \text{ಪಬ}^2 + \text{ಮ}^2\text{ಪ} + \text{ಬಮ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) \\
 &= \text{ಪ}^2(ಬ - \text{ಮ}) - \text{ಪ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) + \text{ಬಮ}(ಬ^2 - \text{ಮ}^2) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})\{\text{ಪ}^2 - \text{ಪ}(ಬ + \text{ಮ}) + \text{ಬಮ}(ಬ + \text{ಮ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಪ}^2 - \text{ಪಬ} - \text{ಪಮ} - \text{ಪಮ} + \text{ಬಮ} + \text{ಬಮ}) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಬಮ} - \text{ಪಬ} + \text{ಬಮ} - \text{ಪಬಮ} - \text{ಪಮ} + \text{ಪ}^2) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})\{\text{ಬ}^2(\text{ಮ} - \text{ಪ}) + \text{ಬಮ}(\text{ಮ} - \text{ಪ}) - \\
 &\quad \text{ಪ}(\text{ಮ} - \text{ಪ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})\{\text{ಬ}^2 + \text{ಬಮ} - \text{ಪ}(\text{ಮ} + \text{ಪ})\} \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})(\text{ಬ}^2 - \text{ಪ}^2 + \text{ಬಮ} - \text{ಪಮ}) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})\{\text{ಬ} + \text{ಪ}\}\{\text{ಬ} - \text{ಪ}\} + \text{ಮ}(\text{ಬ} - \text{ಪ}) \\
 &= (ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})(ಬ - \text{ಪ})(ಬ + \text{ಪ} + \text{ಮ}) \\
 &= -(ಪ - ಬ)(ಬ - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ})(ಪ + ಬ + \text{ಮ}) \\
 &[\because \text{ಬ} - \text{ಪ} = -(\text{ಪ} - ಬ)]
 \end{aligned}$$

* ನೋಡಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಪ ದ ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ಬ-ಮ ಈ ಅವಯವ ದೊರೆತ ಕೂಡಲೇ ಎರಡನೇ ಕಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ೨ ದ ಹೊರತೂ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಗದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವುದು ವಿಶ್ಯವು. ಆದರಂತೆ ಇಲ್ಲಿ ಬ,ದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ.

೨ನೇ ರೀತಿ:- ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಪ=ಬ, ಬ=ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ=ಪ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ ಆದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ-ಮ=೧-ಮ ಮತ್ತು ಮ-ಪ ಈ ಅವಯವಗಳು ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈಗ ರಾಶಿಯು ಕೆತುಮೋಟಿಕ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವವು ಕೆತುಮೋಟಿಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಏಕಕೋಟಿಕ ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈಗ ಇಂಥ

ಗುಣಕವು $ಪ+ಬ+ಮ$ ಇದು ಒಂದೇ ಇರುವದು. ಈಗ ಇದರ ಹೊರತೂ ಜೇರೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವೂ ಇರಬಹುದು. ಅದು ಈ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ

$$\begin{aligned} & ಪಬ (ಪ-ಅ) + ಬಮ (ಬ-ಮ) + ಮಪ (ಮ-ಪ) \\ &= ಅ (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ) \end{aligned}$$

ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಪ, ಬ, ಮ ಇವುಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು. $ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨$ ಎಂಬ ಹಿಡಿದರೆ $೦+೧.೨(೧-೨)+೦=೨(-೧)(೧-೨)(೨)(೧+೨)$
 $\therefore -೬=೬೨; ೬೦.೨=-೧.$

$$\begin{aligned} & \therefore ಪಬ(ಪ-ಬ) + ಬಮ(ಬ-ಮ) + ಮಪ(ಮ-ಪ) \\ &= -(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ). \end{aligned}$$

ಉ.೩. $ಯ(ರ-ಲ)^೩ + ರ(ಲ-ಯ)^೩ + ಲ(ಯ-ರ)^೩$ ಇದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

$$\begin{aligned} ರಾತಿಯು &= ಯ(ರ-ಲ)^೩ + ರ(ಲ-೨ಲಯ+೨ಲಯ-ಯ) \\ &\quad + ಲ(ಯ-೨ಯರ+೨ಯರ-ರ) \\ &= -ಯ(ರ-ಲ) + ಯ(ರ-ಲ)^೩ + \\ &\quad ೨ಯರ(ರ-ಲ) - ರಲ(ರ-ಲ) \\ &= (ರ-ಲ) \{ -ಯ(ರ+ಲ) + ಯ(ರ-ಲ)^೩ + \\ &\quad ೨ಯರಲ - ರಲ \} \\ &= (ರ-ಲ) \{ -ಯರ - ಯಲ + ಯ(ರ-೨ರಲ+ಲ) \\ &\quad + ೨ಯರಲ - ರಲ \} \\ &= (ರ-ಲ) \{ -ರ(ಲ-ಯ) + ಯರ(ಲ-ಯ) + \\ &\quad ಯಲ(ಲ-ಯ) \} \\ &= (ರ-ಲ)(ಲ-ಯ) \{ -ರ(ಲ+ಯ) + ಯರ+ಯಲ \} \\ &= (ರ-ಲ)(ಲ-ಯ) \{ ಲ(ಯ-ರ) + ಯರ(ಯ-ರ) \} * \\ &= (ಯ-ರ)(ರ-ಲ)(ಲ-ಯ) \{ ಲ(ಯ+ರ) + ಯರ \} \\ &= (ಯ-ರ)(ರ-ಲ)(ಲ-ಯ)(ಯರ+ರಲ+ಲಯ). \end{aligned}$$

* ಮೊದಲು ರಾಶಿಯನ್ನು ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ ರ = ಲ ಈ ಅವಯವವು ದೊರೆತ ಕೂಡಲೇ ಎರಡನೇ ಕುಸಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ರದ ಇಳಿತದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದೆ, ಮತ್ತು ಅವರಂತೆ ಮಾಡಿ ಲ = ಯ ಈ ಅವಯವವು ದೊರೆತಕೂಡಲೇ ಮುಂದಿನ ಕುಸಿನಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಲದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದೆ. ಮಂಡಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಒಮ್ಮೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವರ್ಧನನ್ನು ತಿರುಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಲ್ಲ, ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಮೊದಲು ಯದ, ತರುವಾಯ ರದ, ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಲದ ಘಾತಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಇದೇ ಗುಣವೃದ್ಧಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯ = ರ, ಇಲ್ಲವೆ ರ = ಲ, ಇಲ್ಲವೆ ಲ = ಯ ಇಟ್ಟರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವದೊಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಯ = ರ, ರ = ಲ ಮತ್ತು ಲ = ಯ ಈ ಅವಯವಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಈ ಅವಯವವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ಪಂಚಕೋಟಿಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಯ, ರ, ಲ ಗಳೊಳಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚಕ್ರೀಯ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ಅವಯವವು ಇದಿರಬೇಕು. ಚಕ್ರೀಯ ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯರೂಪವು $(ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨) + ಕ(ಯರ + ರಲ + ಲಯ)$ ಇದು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $ಯ^೨(ರ - ಲ)^೨ + ರ^೨(ಲ - ಯ)^೨ + ಲ^೨(ಯ - ರ)^೨ \equiv (ಯ - ರ)(ರ - ಲ)(ಲ - ಯ)$

$\{ (ಯ^೨ + ರ^೨ + ಲ^೨) + ಕ(ಯರ + ರಲ + ಲಯ) \}$.

ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆದು ಯ, ರ, ಲ ಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಯ = ೦, ರ = ೧, ಲ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ $ಲ - ಲರ = (೨ - ೨ + ೨ಕ)$, ಮತ್ತು

ಯ = -೧, ರ = ೦, ಲ = ೧ ಹಿಡಿದರೆ $-೧ - ೧ = ೨(೨ - ಕ)$,

ಅ. ೨೨ - ಕ = ೧. \therefore ಕ = ೦, ಕ = ೧.

\therefore $ಯ^೨(ರ - ಲ)^೨ + ರ^೨(ಲ - ಯ)^೨ \equiv (ಯ - ರ)(ರ - ಲ)(ಲ - ಯ)$

$(ಯರ + ರಲ + ಲಯ),$

೧. ೪. $ಪ^೨(ಬ + ಮ) + ಬ^೨(ಮ + ಪ) + ಮ^೨(ಪ + ಬ) + ೨ಪಬಮ$ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \text{ರಾಶಿಯು} &= \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ}^{\circ} - \text{ಬಮ} + \text{ಮ}^{\circ}) + \text{ಬಮ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 &= \text{ಪ}^{\circ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + \text{ಪ}(\text{ಬ} + \text{ಮ})^{\circ} + \text{ಬಮ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) \\
 &= (\text{ಬ} + \text{ಮ}) \{ \text{ಪ}^{\circ} + \text{ಪ}(\text{ಬ} + \text{ಮ}) + \text{ಬಮ} \} \\
 &= (\text{ಬ} + \text{ಮ}) \{ \text{ಪ}(\text{ಪ} + \text{ಬ}) + \text{ಮ}(\text{ಪ} + \text{ಬ}) \} \\
 &= (\text{ಪ} + \text{ಬ})(\text{ಬ} + \text{ಮ})(\text{ಮ} + \text{ಪ}).
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲವೆ ಪ = -ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ = -ಮ, ಇಲ್ಲವೆ ಮ = -ಪ ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ದೂರೈ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ+ಬ, ಬ+ಮ ಮತ್ತು ಮ+ಪ ಇವು ಗುಣಕಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವು ಏಕಕೋಟಿಕವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ವರ್ಮಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಪ^೦(ಬ+ಮ)+ಬ^೦(ಮ+ಪ)+ಮ^೦(ಪ+ಬ)≡ಅ(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದುದರಿಂದ ಪ,ಬ,ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು. ಪ=೦, ಬ=೦ ಮತ್ತು ಮ=೦ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ೨+೪=೦×೦×೦×೦×೦ ಅ೦+೫ಅ=೫,ಅ೦+೫=೦. ಆದುದರಿಂದ ಪ^೦(ಬ+ಮ)+ಬ^೦(ಮ+ಪ)+ಮ^೦(ಪ+ಬ)≡(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ).

ಉ.೫. (ಪ-ಬ)^೨+(ಬ-ಮ)^೨+(ಮ-ಪ)^೨ ದ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಪ=ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ=ಮ, ಇಲ್ಲವೆ ಮ=-ಪ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಪ-ಬ, ಬ-ಮ, ಮತ್ತು ಮ-ಪ ಇವು ಗುಣಕಗಳಿವೆ. ಈ ಮೂರು ಏಕ ಕೋಟಿಕ ಇದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿದ್ದುದರಿಂದ ಇನ್ನಾವದೂ ವರ್ಮಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ.

$$\begin{aligned}
 &(\text{ಪ} - \text{ಬ})^2 + (\text{ಬ} - \text{ಮ})^2 + (\text{ಮ} - \text{ಪ})^2 \\
 &\equiv \text{ಅ}(\text{ಪ} - \text{ಬ})(\text{ಬ} - \text{ಮ})(\text{ಮ} - \text{ಪ}). \text{ ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದೆ.} \\
 &\text{ಆದುದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.}
 \end{aligned}$$

ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, —೧—೧+೨

=ಅ(—೧)(—೧)², ಅ೦·೨ಅ=೬, ಅ೦·ಅ=೩.

∴ (ಪ—ಬ)² + (ಬ—ಮ)² + (ಮ—ಪ)² ≡ ೬(ಪ—ಬ)
(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ).

ಉ.೬. (ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ಇದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕುರಣ-
ವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಪ=—ಬ, ಇಲ್ಲವೆ ಬ=—ಮ ಇಲ್ಲವೆ ಮ=—ಪ ಎಂದು
ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯು, ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ+ಬ,
ಬ+ಮ, ಮತ್ತು ಮ+ಪ ಇವು ಅವಯವಗಳಿರುವವು. ಅವು ಏಕಕೋಟಿಕ
ವಿದ್ದು ರಾಶಿಯು ತ್ರಿಕೋಟಿಕವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಯಾವ
ವರ್ಜ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಇರಲಾರವು. ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕವು ಅ ಎಂದು
ತಿಳಿದರೆ,

(ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ≡ ೬(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)
(ಮ+ಪ). ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದರಿಂದ ಪ, ಬ, ಮ ದ
ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ ನಿಜವಿರುವದು.

ಪ=೦, ಬ=೧, ಮ=೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, ೨೭—೧—೬=೨೦.೩·೨·೨,
ಅ೦·೬ಅ=೧೨, ಅ೦·ಅ=೬.

∴ (ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ≡ ೬(ಪ+ಬ)
(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ). ಹಿಂದೆ ಪು. ೨೫, ೨೬ ಗಳ ಮೇಲೆ
(ಪ+ಬ+ಮ)² = ಪ² + ಬ² + ಮ² + ೬(ಪ+ಬ)
(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ
ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ

(ಪ+ಬ+ಮ)² — ಪ² — ಬ² — ಮ² ≡

೬(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ) ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ.೭. ಪ²(ಬ+ಮ) + ಬ²(ಮ+ಪ) + ಮ²(ಪ+ಬ) + ೩ಪಬಮ
ಇದರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ರಾಶಿಯು = ಪ²(ಬ+ಮ) + ಪಬಮ + ಬ²(ಮ+ಪ) + ಪಬಮ
+ ಮ²(ಪ+ಬ) + ಪಬಮ

$$\begin{aligned}
 &= ಪ\{ಪ(ಬ+ಮ)+ಬಮ\}+ \\
 &ಬ\{ಬ(ಮ+ಪ)+ಪಮ\}+ಮ\{ಮ(ಪ+ಬ)+ಪಬ\} \\
 &= ಪ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)+ಬ(ಬಮ+ಬಪ+ಪಮ) \\
 &+ಮ(ಮಪ+ಮಬ+ಪಬ) \\
 &= ಪ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)+ಬ(ಪಮ+ಬಮ+ಮಪ)+ \\
 &ಮ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)[ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಬರೆಯಲಾಗಿ] \\
 &= (ಪ+ಬ+ಮ)(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ).
 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ೧-೭ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಬಹಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಮತ್ತು ಉಪಯುಕ್ತವಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವುದು ಬಹಳ ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಯಾವಾಗಲೂ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಬಹಳ ಅಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

೧. ಯರ(ಯ-ರ)+ರಲ(ರ-ಲ)+ಲಯ(ಲ-ಯ).
೨. ಪಬ(ಪ+ಬ)+ಬಮ(ಬ+ಮ)+ಮಪ(ಮ+ಪ)+೩ಪಬಮ.
೩. ತ(ದ-ನ)+ದ(ನ-ತ)+ನ(ತ-ದ).
೪. ಯ(ಪ-ಮ)+ಪ(ಮ-ಯ)+ಮ(ಯ-ಪ).
೫. ಯ(ರ+ಲ)+ರ(ಲ+ಯ)+ಲ(ಯ+ರ)-೪ಯರಲ.
೬. (ಪ+ಬ+ಮ)(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ)-ಪಬಮ.
೭. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ).
೮. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ).
೯. ಪ(ಬ-ಮ)+ಬ(ಮ-ಪ)+ಮ(ಪ-ಬ).
೧೦. ಯ(ರ-ಲ)+ರ(ಲ-ಯ)+ಲ(ಯ-ರ).
೧೧. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)+(ಮ-ಬ)(ಪ-ಬ).
೧೨. ಯ(ರ-ಲ)+ರ(ಲ-ಯ)+ಲ(ಯ-ರ).
೧೩. (ಯ-ರ)+ರ(ಲ-ಯ)+ಲ(ಯ-ರ).
೧೪. (ಯ+ರ)ಲ+(ಯ+ರ)(ಯರ+ಲ)+೨ಯರಲ.

೧೫. ಯ + ರ, ರ + ಲ, ಲ + ಯ,

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ದ್ವಿಸದಿಯು ರೂಢ್ಯವಿದ್ದರೆ
ಯ^೨(ರ + ಲ) + ರ^೨(ಲ + ಯ) + ಲ^೨(ಯ + ರ) + ೨ಯರಲ
ಈ ರಾಶಿಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವದೆಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

೪.೧. ಬಹಳ ಸುಲಭವಿರುವ ರಾಶಿಗಳ ಮಹತ್ತರವು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ
ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ಲಘುತನು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವನ್ನು ಹೇಗೆ
ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಎರಡನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಂಟನೆಯ ಮತ್ತು
ಒಂಭತ್ತನೆಯ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ (ಪು. ೧೬೫—೧೮೧) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ
ಇದು ಉಪಯೋಗವಿರುವ ಪ್ರಾರಂಭಮಾಡಿ ಅದೇ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದಿನ
ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

೧.

ಸ್ವಲ್ಪ ಉಪಲಕ್ಷಣ

೪.೨. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗೆ ಯಾವ ರಾಶಿಯಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದು
ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ವಿಭಾಜಕವು ಮತ್ತು, ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯಿಂದ ಯಾವ ರಾಶಿಗೆ
ನಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದೋ ಅದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ವಿಭಾಜ್ಯವು.
ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ವಿಭಾಜಕವಿದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣವಿರುವದು, ಮತ್ತು
ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯು ಅದರ ವಿಭಾಜ್ಯದ ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ.

೪.೩. ಅಯಕ್ಕೆ ಯ ದಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಅಯ ದ
ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು, ಅದರಿಂದ ಕಯಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ.
ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಕಯ ದ್ವಾದರೂ ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ
ಎರಡಕ್ಕೂ ಭಾಗಹೋಗುವದರಿಂದ ಅದು ಎರಡರ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ—
ವಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವುದು, ನ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವುದು ಮತ್ತು ಪಯ ನಾದರೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣವಿರುವುದು. ಆದರೆ ಈ ಮೂರೂ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ ವಿಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿ) ಪಯ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟದಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. (ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ) ಇರುತ್ತದೆ.

೪.೪. ಅಕಯ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಅಯ ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಅಯ ದ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಕಯ ದಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಕಯ ದಾದರೂ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಅವಕ್ಕೆ ಅಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಈ ಎರಡರಿಂದಲೂ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಅದು ಎರಡರ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು.

ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಈ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದ ಅಕಪಯಕ್ಕೆ ಭಾಗಹೋಗುವುದು. ಅದುದರಿಂದ ಅಕಪಯ ಇದು ಅವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುವುದು. ಆದರೆ ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳಿಂದ ಅಕಪಯಕ್ಕೆ ದೇಗೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆಂದೂ ಅವರಂತೆಯೇ ಅವುಗಳಿಂದ ೨ ಅಕಪಯ, ೩ ಅಕಪಯ, ೪ ಅಕಪಯ, ೫ ಅಕಪಯ, ಸ್ವಲ್ಪದವರೆಗೆ ಹೇಳುವುದೆಂದರೆ ಅಕಪಯ ದ ಯಾನ್ತ್ರವೇ ವಸ್ತುಗೆ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ ಅಕಪಯ ಮತ್ತು ಅವರಂತೆ ಅವರ ಯಾನ್ತ್ರವೇ ಪಟ್ಟಿ ಇರುವಂಥ ರಾಶಿಯು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಅನಂತ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕಗಳು ಸಂಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಅಕಪಯ ಇದು ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದು, ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಅಪಯ ಮತ್ತು ಕಪಯ ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. (ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ).

೪.೫. ಮಹತ್ತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಲಘುತಮ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮಹತ್ತಮ ಅಪವರ್ತಕ ಮತ್ತು ಲಘುತಮ ಅಪವರ್ತಕ ಎಂದು ಸಂಜ್ಞೆಗಳಿವೆ. ಅಪವರ್ತಕ ಅಂ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಕ ಅಂ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜ್ಯ.

೪.೬. ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಗಳು ಸ್ವಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಆ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ **ಮಹತ್ತಮ** ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಆ ರಾಶಿಗಳಿಂದ ಯಾವ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಹೋಗುವದೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ **ಲಘುತಮ** ಯಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು, ಅವುಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದ್ದೊಡನೆಯೇ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನೋಡುವದರಿಂದ ನಾವು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಮತ್ತು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.** ಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

೩೦೮೪೦೦ ಮತ್ತು ೨೪೮೪೦೦೦ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ೮೪, ೪೦ ಮತ್ತು ೪೦೦ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೮, ೪ ಮತ್ತು ೪೦ ಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೬ ಇದು ೩೦ ಮತ್ತು ೨೪ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು. ಅದುದರಿಂದ ೬೮೪೦೦೦ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದರಂತೆಯೇ ೮೪, ೪೦ ಮತ್ತು ೪೦೦ ಇವು ೮, ೪ ಮತ್ತು ೪೦ ಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೧೦೦ ಇದು ೩೦ ಮತ್ತು ೨೪ ರಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಅದುದರಿಂದ ೧೦೦೮೪೦೦೦ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

೯೮೪೦೦೦, ೧೦೮೪೦೦೦ ಮತ್ತು ೧೮೪೦೦೦೦೦೦ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ, ೮೦ ಇದು ಅವರ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ಪ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಅವರ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಸಾಧಾರಣವಲ್ಲ, ಯ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆ, ಆದರೆ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಅದುದರಿಂದ ಅದು ಸಾಧಾರಣವಲ್ಲ, ಕ್ಷೌ ಇದು ಕ್ಷ ದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧಾರಣ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು, ಮತ್ತು ೯, ೧೦ ಮತ್ತು ೧೮ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವು ೩, ಅದುದರಿಂದ ೩೮೪೦೦೦ ಇದು **ಮ. ಸಾ. ವಿ.** ಅದರಂತೆಯೇ ೮೦, ೮೦೦ ಮತ್ತು ೮೦೦೦ ಇವು ೮, ೮೦ ಮತ್ತು ೮೦೦ ಗಳ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಗಳು, ಮತ್ತು ೩೬ ಇದು ೯, ೧೦ ಮತ್ತು ೧೮ ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇದ್ದುದರಿಂದ ೩೬೮೪೦೦೦೦೦ ಇದು **ಲ. ಸಾ. ವಿ.**

ಏಕಪದ ರಾಶಿಗಳೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದಿಂದರೆ ಅಂಕ ಗುಣಕಗಳೆ ದೃಢಭಾಜಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಣ್ಣ ಘಾತವು ಕಂಡುಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಗುಣಾ-ಕಾರವೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಂಕಗುಣಕಗಳಿಂದ ಭಾಗ-ಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಯಾವುದು ಮೊದ್ಲ ಘಾತವು ಕಂಡು ಬರುವದೋ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು. ಈ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೇ ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೧೭. (ಉಪಕರಣ)

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ. (ಇಂಥ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೋದ ವರುಷ ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೇವಲ ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಂಥವವಿವೆ.)

೧. ೪ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ.
೨. ೮ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೨೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ.
೩. ೨೭ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ ; ೨೦ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ.
೪. ೨೫ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ ; ೨೦ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ.
೫. ೨೨ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೨೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ.
೬. ೧೭ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ.
೭. ೮ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ ; ೨೦ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ.
೮. ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೨೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ.
೯. ೬ಪಶುಪಮಃ ; ೧೦ಪಶುಪಮಃ ; ೨೦ಪಶುಪಮಃ.
೧೦. ೧೪ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ.
೧೧. ೨೪ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಅಕ್ಷಿಪಮಃ ; ೧೦ಪಶುಪಮಃ.
೧೨. ೮ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ ; ೧೦ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ ; ೬ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ ; ೧೦ಯಶಿರಶಿಲಕ್ಷ್ಮಿ.

೨.

೪.೭. ಏಕಪದರಾಶಿಗಳ ಗುಣಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೊಡನೆಯೇ, ಬಹಳ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳೆ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ನೋಡಿ ಹೇಳಲು ಬರುವವು. ಕೆಲವು ರಾಶಿಗಳು ಏಕಪದವಿಲ್ಲದೇ ಇದ್ದರೂ ಅವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳು ಸಹ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವವು ಮತ್ತು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕೇವಲ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ನೋಡುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಅ+ಅಕ+ಕ ಮತ್ತು ಅ-ಕ ಇವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅ+ಅಕ+ಕ \equiv (ಅ+ಕ)^೨ ಮತ್ತು ಅ-ಕ \equiv (ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ) ಇರುವ ಸಂಗತಿಯು ರಾಶಿಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದರಿಂದ ಅ+ಕ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು (ಅ+ಕ)^೨ (ಅ-ಕ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರಂತೆಯೇ ಅ+ಕ ಮತ್ತು ಅ+ಅಕ+ಕ ಇವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳು ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅ+ಕ \equiv (ಅ+ಕ)(ಅ-ಅಕ+ಕ) ಮತ್ತು ಅ+ಅಕ+ಕ \equiv (ಅ+ಅಕ+ಕ)(ಅ-ಅಕ+ಕ) ಇವು ಗೊತ್ತಿವುದರಿಂದ ಅ-ಅಕ+ಕ ಇದು ಮ ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು (ಅ+ಕ)(ಅ+ಅಕ+ಕ) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಎಂದು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಗಳು ಇಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು.

ಉ ೧. ಒಕ್ಷ+ಖಕ್ಷ+ಒಕ್ಷ+೭೦ ಮತ್ತು ಒಕ್ಷ+ಒಕ್ಷ+ಒಕ್ಷ-೭೫ ಇವುಗಳೆ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ.ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವೆಂದು ಎರಡನೇಯವರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು, ಏಕೆಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕ-

ಗಣ ಜೈಜಿಕ ಜೇವೀಯ ರೂಪ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಕ್ಷ-೧ ಇವೆಂದು ಗುಣಕವಿರು-
ವದು, ಅದುದರಿಂದ ಅದರ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡುವಾ

$$\begin{aligned}
 & ೨ಕ್ಷಿ + ೧೦೦ಕ್ಷಿ + ೧೦೦೦ಕ್ಷಿ - ೨೫ \\
 &= ೨ಕ್ಷಿ - ೨ಕ್ಷಿ + ೧೦೦ಕ್ಷಿ - ೧೦೦ಕ್ಷಿ + ೨೫ಕ್ಷಿ - ೨೫ \\
 &= ೨ಕ್ಷಿ(ಕ್ಷ-೧) + ೧೦೦ಕ್ಷಿ(ಕ್ಷ-೧) + ೨೫(ಕ್ಷ-೧) \\
 &= (ಕ್ಷ-೧)(೨ಕ್ಷಿ + ೧೦೦ಕ್ಷಿ + ೨೫) \\
 &= (ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨)
 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ಷ-೧ ಈ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ಮ. ಸಾ. ವಿ
ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ಕ್ಷ+೫ ಮತ್ತು ೨ಕ್ಷ+೨ ಇವು-
ಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗುಣಕವು ಇದ್ದಿರಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು
ಅಡ್ಡಿಯಿಲ್ಲ. ರಾಶಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ಕ್ಷ+೫ ಈ ಗುಣಕವಿದೆಯೆಂದು
ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅವಕ್ಕನುಸಾರಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವಾ.

$$\begin{aligned}
 & ೨ಕ್ಷಿ + ೫೦೦ಕ್ಷಿ + ೧೦೦೦ಕ್ಷಿ + ೨೦ \\
 &= ೨ಕ್ಷಿ + ೨೦೦ಕ್ಷಿ + ೨೫೦ಕ್ಷಿ + ೧೨೫೦ಕ್ಷಿ + ೧೦೦೦ಕ್ಷಿ + ೨೦ \\
 &= ೨ಕ್ಷಿ(ಕ್ಷ+೫) + ೨೫೦(ಕ್ಷ+೫) + ೧೦೦(ಕ್ಷ+೫) \\
 &= (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷಿ + ೨೫೦ಕ್ಷಿ + ೧೦೦) \\
 &= (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨)(೨ಕ್ಷ+೨)
 \end{aligned}$$

∴ (ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಮತ್ತು (ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೨)(೨ಕ್ಷ+೨) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು
ಅಕ್ಷವಾ ಹೆಚ್ಚು ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಗುಣಪೃಥಕ್ಕರಣಕ್ಕಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು
ಕ್ರಮದಿಂದಲೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಯಾವಾಗಲೂ ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆಂದಿಲ್ಲ.
ಅನೇಕ ಸಲ ಯಾವುದರ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು
ಸುಲಭವಿರುವದೋ ಅದರ ಪೃಥಕ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ. ನಂತರ ಅದರ ಯಾವ
ಅವಯವಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೆಂಬದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದವುಗಳ
ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಮುಕ್ತಿಸುವದು ಹೆಚ್ಚು ಇಷ್ಟವಾದದ್ದು.
ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಜೊಳ್ಳು
ರಾಗಿ ಇರುವದೋ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆಯಬೇಕು. ಅನಂತರ

ಕ್ರಮವಾಗಿ ಉಳಿದ ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದೊಂದು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಸಮಾಪೇಷವಾಗುವ ಎಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಯವವ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವಿರುವದೋ ಅವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉ. ೨. $೬ಅ + ೧೩ಅಶ + ೪೧ಅಕ + ೧೨ಕ$, $೨೦ಅ - ೨೨ಅಕ$
 $- ೮ಕ + ೬ಕ$ ಮತ್ತು $೧೬ಅಕ - ೫ಅಕ$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ.
 ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಕೊನೆಯ ರಾಶಿಯ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪರಿಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಬರೇಹ ಸುಲಭವಿರುವದೆಯದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

$$\begin{aligned} ೧೬ಅಕ - ೫ಅಕ &= ೨ಅಕ(೮ಅ - ೨೬ಕ) \\ &= ೨ಅಕ(೨೨ - ೩ಕ)(೪ಅ + ೬ಅಕ + ೯ಕ); \end{aligned}$$

ಈ ಗುಣಕಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೂರೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರಬೇಕಾದರೆ ಅದು $೨೨ - ೩ಕ$ ಇದೇ ಇರಬೇಕೆಯದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ.

$$\begin{aligned} ೬ಅ + ೧೩ಅಶ - ೪೧ಅಕ + ೧೨ಕ &= ೬ಅ - ೯ಅಕ + ೨೨ಅಕ - ೩೩ಅಕ - ೮ಅಕ + ೧೨ಕ \\ &= ೩ಅ(೨೨ - ೩ಕ) + ೧೧ಅಕ(೨೨ - ೩ಕ) - ೪ಕ(೨೨ - ೩ಕ) \\ &= (೨೨ - ೩ಕ)(೩ಅ + ೧೧ಅಕ - ೪ಕ) \\ &= (೨೨ - ೩ಕ)(೮ಅ + ೪ಕ)(೩ಅ - ೪ಕ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ೨೦ಅ - ೨೨ಅಕ - ೮ಕ + ೬ಕ &= ೨೦ಅ - ೨೦ಅಕ - ೨ಅಕ + ೩ಅಕ - ೪ಅಕ + ೬ಕ \\ &= ೧೦ಅ(೨೨ - ೩ಕ) - ೨ಕ(೨೨ - ೩ಕ) - ೨ಕ(೨೨ - ೩ಕ) \\ &= (೨೨ - ೩ಕ)(೧೦ಅ - ೮ಕ - ೨ಕ) \\ &= (೨೨ - ೩ಕ)(೨೨ - ೪ಕ)(೫ಅ + ೨ಕ) \end{aligned}$$

$೨೨ - ೩ಕ$ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು

$$\begin{aligned} &೨ಅಕ(೮ಅ + ೪ಕ)(೨೨ - ೩ಕ)(೨೨ - ೪ಕ)(೫ಅ + ೨ಕ) \\ &(೪ಅ + ೬ಅಕ + ೯ಕ). \text{ ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. } \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ. (ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ವಿರುವದು.)

೧. ವೌ + ವೌಸೌ + ಸೌ; ವೌ + ಸೌ.

೨. ಯೌ + ಲಯ + ಲ; ಯೌ + ಲಯ + ಲ.

೩. ರೌ — ಲರ + ಲ; ರೌ — ಲರ + ಲ.

೪. ನೌ — ಲೌ; ನೌ — ಲೌನೌ + ಲೌ.

೫. ಓಮೌ — ಲೌ; ಓಮೌ — ಲೌ.

೬. ವೌ — ಸೌ; ವೌ — ಲವೌಸೌ + ಸೌ.

೭. ನೌ — ಲೌ; ನೌ — ಲೌನೌ + ಲೌನ — ಲೌ.

೮. ಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ + ಲ; ಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ + ಲ.

೯. ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷ + ಲ; ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ.

೧೦. ಲಯೌ + ಲಯೌಕ್ಷ + ಲಯೌಕ್ಷ + ಲಯೌ;

ಲಯೌ + ಲಯೌಕ್ಷ + ಲಯೌಕ್ಷ.

೧೧. ಲಯೌ + ಲಯ + ಲೌ + ಲೌಕ್ಷ — ಲಕ್ಷೌ;

ಲಯೌ + ಲಯೌಕ್ಷ + ಲಕ್ಷೌ + ಲಯ + ಲಕ್ಷ + ಲ.

೧೨. ಲೌ + ಲೌ + ಲೌಗೌ — ಲೌಲಕಗ;

ಲೌ + ಲೌಲಕಗ + ಲೌಗೌ — ಲೌ.

೧೩. ಲೌಲಕಗ — ಲೌಲಕಗ; ಲೌ — ಲೌಲಕಗ — ಲೌ.

೧೪. ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ — ಲಕ್ಷ;

ಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ + ಲ.

೧೫. ವೌ + ಲವೌ + ಲವೌ; ವೌ + ಲವೌ + ಲವೌ; ವೌ + ಲವೌ.

೧೬. ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ; ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ — ಲಕ್ಷ; ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷ ೧೭೦.

೧೭. ಯೌ — ಲಯೌ + ಲಯೌ; ಲಯೌ — ಲಯೌ; ಲಯೌ — ಲಯೌ.

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಹೇಳಿ.

೧೮. ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷೌ + ಲಕ್ಷ; ಲಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷ — ಲಕ್ಷ;

ಕ್ಷೌ — ಲಕ್ಷ — ಲಕ್ಷ.

೧೯. ೬ಯಃ—೧೧ಯಕ್ಷ—೧೦ಕ್ಷಃ ; ೧೨ಯಃ—೧೩ಯಕ್ಷ—೧೪ಕ್ಷಃ ;
 ೮ಯಃ—೨೪ಯಕ್ಷ+೨೫ಯಃ.

೨೦. ಅಃ—೧೧ಅಃ+೨೪ಅಃ-೪೦ ; ಅಃ-೬ಅಃ+೬ ; ಅಃ-೬ಅಃ-೬ಅಃ+೬೦.

೨೧. ೨೪ಪಃ+೨೪ಪಃ—೧೯ಪ—೧೫ ; ೬ಪಃ+ಪಃ—೧೨ಪ+೫ ;
 ೨ಪಃ—ಪಃ—೨ಪ+೧ ; ೬ಪಃ+೧೩ಪಃ+೨ಪ—೫.

೩.

೪.೮. ಹಿಂದಿನ ಸಂಗ್ರಹಗಳೊಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣವೃದ್ಧಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದು ಸಾಧಾರಣತಃ ಸುಲಭವಿದೆ. ಆದರೆ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಇಷ್ಟು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ತೆಗೆಯಲು ಬಾರದ ರಾಶಿಗಳು ಹಲವು ಸಾರೆ ನಮ್ಮೆದುರು ಬರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿವೇಚಿಸಿದ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮತ್ತು ಗುಣಕ ನಿಯಮಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಬಹಳವಾಗುವದು.

೮. ೧. ೧೨ಯಃ+೪೦ಯಃ+೧೩ಯಃ—೨೦ ಮತ್ತು ೬ಯಃ—೫ಯಃ—೨೧ಯಃ+೧೦ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ.

ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದ ನಂತರ ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ-ಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜು ಶೂನ್ಯವಿರುವದರಿಂದ ಯ—೧ ಇವೊಂದು ಅದರ ಅವಯವವಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿ,

$$\begin{aligned}
 & ೬ಯಃ+೫ಯಃ—೨೧ಯಃ+೧೦ \\
 & = ೬ಯಃ—೬ಯಃ+೧೧ಯಃ—೧೧ಯಃ—೧೦ಯಃ+೧೦ \\
 & = ೬ಯಃ(ಯ-೧)+೧೧ಯಃ(ಯ-೧)—೧೦(ಯ-೧) \\
 & = (ಯ-೧)(೬ಯಃ+೧೧ಯಃ-೧೦) \\
 & = (ಯ-೧)(೨ಯಃ+೫)(೩ಯಃ-೨)
 \end{aligned}$$

ಒಂದು ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಳಿದನಂತರ ಉಳಿದ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಈಗ ಸುಲಭವಿರುವದು. ಏಕೆಂದರೆ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ ೨ಯಃ+೫ ಮತ್ತು ೩ಯಃ-೨ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅವಯವವು ಅದರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ಎಂದು ಅನುಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕ-ಗಳ ಬೇರೀಜು ಬಿಡಿ ಇರುವದು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ೨ಯಃ+೫ ಮತ್ತು ೩ಯಃ-೨ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಹೋಗುವದು.

$$\begin{aligned}
 & ೧೨ಯಿ + ೪೦ಯಿ + ೧೩ಯ - ೬೦ \\
 & = ೧೨ಯಿ + ೬೦ಯಿ + ೧೦ಯಿ + ೨೫ಯ - ೧೨ಯ - ೬೦ \\
 & = ೬ಯಿ(೨ಯ + ೫) + ೫ಯ(೨ಯ + ೫) - ೬(೨ಯ + ೫) \\
 & = (೨ಯ + ೫)(೬ಯಿ + ೫ಯ - ೬) \\
 & = (೨ಯ + ೫)(೬ಯ - ೨)(೨ಯ + ೨) \\
 & ೨. (೨ಯ + ೫)(೬ಯ - ೨) ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು \\
 & (ಯ - ೧)(೨ಯ + ೫)(೬ಯ - ೨)(೨ಯ + ೨) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.
 \end{aligned}$$

ಉ. ೨. ಯಿ - ೬ಯಿ - ೬೬ಯಿ + ೬೦ಯ + ೨೪೦ ಮತ್ತು
ಯಿ + ೯ಯಿ - ೫ಯಿ - ೧೫೩ಯ - ೧೪೦ ಇವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು
ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ.

ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮತ್ತು
ಅದರಂತೆಯೇ ಏಕಮ ಘಾತ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ಒಂದೇ
(-೧೪೪) ಇದ್ದುದರಿಂದ ಯ + ೧ ಇದ್ದುದು ಅನವಶ್ಯವಿರುವುದು. ಅದರಂತೆ
ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$\begin{aligned}
 & ಯಿ + ೯ಯಿ - ೫ಯಿ - ೧೫೩ಯ - ೧೪೦ \\
 & = ಯಿ + ೮ಯಿ + ೮ಯಿ - ೧೬ಯಿ - ೧೬ಯ - ೧೪೦ಯ - ೧೪೦ \\
 & = ಯಿ(ಯ + ೧) + ೮ಯಿ(ಯ + ೧) \\
 & \quad - ೧೬ಯ(ಯ + ೧) - ೧೪೦(ಯ + ೧) \\
 & = (ಯ + ೧)(ಯಿ + ೮ಯಿ - ೧೬ಯ - ೧೪೦).
 \end{aligned}$$

ಈಗ ಯಿ + ೮ಯಿ - ೧೬ಯ - ೧೪೦ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ
ಜೈಜಿಕ ಜೋಡಣೆ-೧೪೪. ಸಂಭವನೀಯ ಗುಣಕಗಳು ಯ - ೨, ಯ + ೨,
ಯ - ೪, ಯ + ೫, ಯ + ೫....೨. ಈ ಗುಣಕ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ
ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

(ಯ + ೪) ಈ ಗುಣಕವು ಸಂಭವಿಸುವದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅದರೊಳಗಿನ
ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ೫ ೦೦೦ - ೧೪೪ಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ.)

ಯ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ ರಾಶಿಯ ಜೊತೆಯು - ೧೬೬ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಮತ್ತು ಯ = -೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ - ೧೦ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ

ಯ—೨ ಮತ್ತು ಯ+೨ ಇವು ಅವಯವಗಳಲ್ಲ. ಯ=೪ ಎಂಬ ತಿಳಿವಳಿಕೆ
ಕೊಂಡರೆ ಮಾತ್ರ ಅದು ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಯ—೪
ಇದೊಂದು ಅವಯವವಿರುವದು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$\text{ಯ}^2 + \text{೨ಯ}^2 - ೧೨ಯ - ೧೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2 - ೪ಯ^2 + ೧೨ಯ^2 - ೪೨ಯ + ೨೫ಯ - ೧೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೪) + ೧೨ಯ(\text{ಯ} - ೪) + ೨೫(\text{ಯ} - ೪)$$

$$= (\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ}^2 + ೧೨ಯ + ೨೫)$$

$$= (\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ} + ೫)(\text{ಯ} + ೭)$$

$$\therefore \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯು} = (\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ} + ೫)(\text{ಯ} - ೭)$$

ಈಗ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದಿದ್ದುದರಿಂದ ಈ ಅವಯವ-
ಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಇಲ್ಲವೆ ದೊಡ್ಡ ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುತರ-
ವಾಗಿ ಇರುವವು. ಯ+೧ ಇದು ಇಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ
ಕೊನೆಯ ಪದ ೨೪೦ ಇದಕ್ಕೆ ೭ ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅದುದರಿಂದ
ಯ+೭ ಇದಾದರೂ ಇರಲಾರದು. ಯ-೪ ಮತ್ತು ಯ+೫ ಇವು
ಖಳಿದವು.

ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೈಜಿಕ ಬೇರೀಯ ೨೭೦ ಇರುವದು.
ಅಂದ ಮೇಲೆ ಇವು ಗುಣಕಗಳಿರುವ ಸಂಭವಿದೆ. ಯ=೪ ಹಿಡಿದರೆ,
ರಾಶಿಯು = ೨೫೨ - ೧೯೨ - ೫೭೬ + ೨೭೨ + ೨೪೦ = ೦

\therefore ಯ-೪ ಇದು ಅವಯವವಿದೆ. ಯ= -೫ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ
ರಾಶಿಯು = ೬೨೫ + ೩೭೫ - ೯೦೦ - ೩೪೦ + ೨೪೦ = ೦

\therefore ಯ+೫ ಇದಾದರೂ ಅವಯವವಿದೆ.

$$\text{ಯ}^2 - ೩ಯ^2 - ೩೭ಯ^2 + ೬೨ಯ + ೨೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2 - ೪ಯ^2 + \text{ಯ}^2 - ೪ಯ^2 - ೩೭ಯ^2 + ೧೨೨ಯ$$

$$- ೬೦ಯ + ೨೪೦$$

$$= \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೪) + \text{ಯ}^2(\text{ಯ} - ೪) - ೩೭ಯ(\text{ಯ} - ೪)$$

$$- ೬೦(\text{ಯ} - ೪)$$

$$= (\text{ಯ} - ೪)(\text{ಯ}^2 + \text{ಯ}^2 - ೩೭ಯ - ೬೦)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{ಯ} - \text{೪})(\text{ಯ} + \text{೫}) - \text{೪ಯ} - \text{೨ಯ} - \text{೧೨ಯ} - \text{೬೦} \\
 &= (\text{ಯ} - \text{೪})\{\text{ಯ}(\text{ಯ} + \text{೫}) - \text{೪ಯ}(\text{ಯ} + \text{೫}) - \text{೧೨}(\text{ಯ} + \text{೫})\} \\
 &= (\text{ಯ} - \text{೪})(\text{ಯ} + \text{೫})(\text{ಯ} - \text{೪ಯ} - \text{೧೨}) \\
 &= (\text{ಯ} - \text{೪})(\text{ಯ} + \text{೫})(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} - ೬) \\
 \therefore (\text{ಯ} - \text{೪})(\text{ಯ} + \text{೫}) \text{ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು } (\text{ಯ} + ೧) \\
 (\text{ಯ} - ೬)(\text{ಯ} + ೫)(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} - ೬) \text{ ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.}
 \end{aligned}$$

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ರೀತಿ.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿ-

೧. ಪ೪ + ೧೬ಪ೪ + ೬೫ಪ + ೫೦ ; ಪ೪ + ೧೨ಪ೪ + ೫ಪ - ೧೫೦.
೨. ಮ೪ - ೫ಮ೪ - ೨೨ಮ + ೫೬ ; ಮ೪ - ೧೯ಮ + ೨೦.
೩. ನ೪ + ೧೩ನ೪ + ೫೦ನ + ೫೬ ; ನ೪ + ೧೦ನ೪ + ೧೬ನ - ೨೪.
೪. ತಯ೪ - ೨೩ಯ೪ + ೧೨ಯ + ೫೫ ; ತಯ೪ - ೩೩ಯ೪ + ೧೦೨ಯ - ೨೫.
೫. ಕ್ಷ೪ - ೩ಕ್ಷ೪ - ೧೦ಕ್ಷ + ೨೪ ; ಕ್ಷ೪ - ೬ಕ್ಷ೪ - ೧೪ಕ್ಷ + ೨೪.
೬. ಟಪ೪ + ೩ಪ೪ - ೯ಪ + ೨ ; ಟಪ೪ - ೧೦ಪ೪ + ೩ಪ + ೨.
೭. ಓರ೪ - ೪ - ೨೦ರ + ೧೪ ; ಓರ೪ + ೧೦ರ೪ - ೨೨ರ + ೮.
೮. ಅಯ೪ + ೫ಯ೪ + ಯ - ೩ ; ಅಯ೪ + ೬ಯ೪ - ಯ + ೧೨.
೯. ಆಮ೪ - ೪ಮ೪ - ೩೪ಮ + ೧೫ ; ಆಮ೪ + ೫ಮ೪ + ೫ಮ + ೩.
೧೦. ಓನ೪ + ೪ನ೪ - ೧೧ನ - ೪ ; ಓನ೪ - ೧೪ನ೪ + ೨ನ + ೩.
೧೧. ಓಕ್ಷ೪ + ೨೫ಕ್ಷ೪ - ೧೬೪ಕ್ಷ + ೨೦ ; ಓಕ್ಷ೪ + ೧೬ಕ್ಷ೪ - ೬೬ಕ್ಷ - ೨೦.
೧೨. ಧಯ೪ - ೬೩ಯ೪ - ೧೦ಯ + ೧೦ ;
ತಯ೪ - ೧೧ಯ೪ + ೪ಯ + ೫.

೪.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು.

೪-೯. ಈ ಮತ್ತು ೧ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಜಕ ೩. ೧೦. ೪೪ ೯ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲಿಗೆ ಆವರಣವಿದೆ. ೯ ಕೆ ಕೆರೆ ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆ ೧೦ ಮತ್ತು ೬. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ೩ ಇದು ಅವಯವವಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ನಾವು ಬೇರೊಂದು ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೮. ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ೮೨, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು ೨೪. ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ೮ ಇದು ಗುಣಕವಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅಂತರದ ಒಂದು ಗುಣಕ ವಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸರ್ವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲು ನಮಗೆ ಬರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ. ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಮ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ತ=ಮಕ ಮತ್ತು ದ=ಮಗ (ಇಲ್ಲಿ ಕ ಮತ್ತು ಗ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತ ಮತ್ತು ದ ಗಳಿಗೆ ಮ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗ ಲಬ್ಧಗಳಿವೆ)

∴ ತ + ದ = ಮಕ + ಮಗ = ಮ(ಕ + ಗ), ಮತ್ತು

ತ - ದ = ಮಕ - ಮಗ = ಮ(ಕ - ಗ).

ಸಿದ್ಧಾಂತ ೧. ∴ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅಂತರದ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವು ಹಲವು ಸಾರಿ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳಿರುವ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಪೃಥಕ್ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದರಲ್ಲಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಉ. ೧. ೩ಯೆ^೨ - ೩೨ಯೆ^೨ + ೪೪ಯೆ + ೮೦ ಮತ್ತು ೩ಯೆ^೨ - ೩೧ಯೆ^೨ + ೫೦ಯೆ + ೪೮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು

ರಾಶಿಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು = ೩ಯೆ^೨ - ೪೪ಯೆ - ೨೦

= ೨(೩ಯೆ^೨ - ೨೨ಯೆ - ೧೦)

= ೨(ಯೆ - ೮)(೩ಯೆ + ೨)

೨ ಇದು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿಲ್ಲದೆ ಅದು ಯ—೮ ಇರಬಹುದೆಂದು, ಇಲ್ಲವೆ ೩ಯ+೨ ಇರಬಹುದು. ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡೂ ಇರಬಹುದು. ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ನೋಡುವನಾ.

೩ಯ^೩—೩೨ಯ+೯೪ಯ+೮೦

= ೩ಯ^೩—೨೪ಯ^೩—೧೩ಯ+೧೦೪ಯ—೧೦೦ಯ+೮೦

= ೩ಯ(ಯ—೮)—೧೩ಯ(ಯ—೮)—೧೦(ಯ—೮)

= (ಯ—೮) ೩ಯ—೧೩ಯ—೧೦

= (ಯ—೮)(ಯ—೮)(೩ಯ+೨)

೩ಯ^೩—೩೧೦ಯ+೫೦೦ಯ+೪೮

= ೩ಯ^೩—೨೪೪ಯ^೩—೨೦೦ಯ+೫೬—೬೩ಯ+೪೮

= ೩ಯ^೩(ಯ—೮)—೨೦೦(ಯ—೮)—೬(ಯ—೮)

= (ಯ—೮)(೩ಯ^೩—೨೦೦ಯ—೬)

= (ಯ—೮)(ಯ—೩)(೩ಯ+೨)

∴(ಯ—೮)(೩ಯ+೨) ಇದು ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು

(ಯ—೮)(ಯ—೫)(ಯ—೩)(೩ಯ+೨) ಇದು ಲ.ಸಾ.ವಿ.

ಉ. ೨. ೨೪೪೩+೯೪೩+೧೦೩—೩೫ ಮತ್ತು ೨೪೩—೩೦೩—೫೨೩+೩೫ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ವಿ.ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಜೇರ್ವಿಜನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪದವು ಜೋಷಣ ಗುಣವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ರಾಶಿಗಳ ಜೇರ್ವಿಜು = ೨೪೪೩+೯೪೩+೧೦೩

= ೨೪(೧೬೩+೩೩೩+೧)

= ೨೪(೪೩+೧)(೪೩+೧)

೨ ಮತ್ತು ೪ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂಲರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ. ೪೩+೧ ಇದು ಇರಬಹುದೇ? ನೋಡಲಿಕ್ಕೆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೇರ್ವಿಜು ೧೫೪ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ—೪೪ ಇದೆ. ೪೩+೧ ಇದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಜೇರ್ವಿಜಿನಿಂದ (೫ ರಿಂದ) ಅವಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದು ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕ

ವಿರಲಾರದು. $೪ಕ್ಷ+೭$ ಇದು ಉಳಿಯಿತು. ಇದರೊಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ (೧೧ರಿಂದ) ೧೫೪ ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು — ೪೪ ಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುವರಿಂದ ಅಷ್ಟೇ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರಬಹುದು. ಅವಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿ,

$$೨೪ಕ್ಷ+೯೪ಕ್ಷ+೭೧ಕ್ಷ-೨೫$$

$$= ೨೪ಕ್ಷ+೪೨ಕ್ಷ+೫೨ಕ್ಷ+೮೧ಕ್ಷ-೨೦ಕ್ಷ-೨೫$$

$$= ೬ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ+೭)+೧೩ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ+೭)+೫(೪ಕ್ಷ+೭)$$

$$= (೪ಕ್ಷ+೭)(೬ಕ್ಷ+೧೩ಕ್ಷ-೫)$$

$$= (೪ಕ್ಷ+೭)(೩ಕ್ಷ-೧)(೨ಕ್ಷ+೫).$$

$$೪ಕ್ಷ-೬೦ಕ್ಷ-೫೭ಕ್ಷ+೨೫$$

$$= ೪ಕ್ಷ+೧೪ಕ್ಷ-೪೪ಕ್ಷ-೭೭ಕ್ಷ+೨೦ಕ್ಷ+೨೫$$

$$= ೨ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ+೭)-೧೧ಕ್ಷ(೪ಕ್ಷ+೭)+೫(೪ಕ್ಷ+೭)$$

$$= (೪ಕ್ಷ+೭)(೨ಕ್ಷ-೧೧ಕ್ಷ+೫)$$

$$= (೪ಕ್ಷ+೭)(೨ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ-೫)$$

$$\therefore ೪ಕ್ಷ+೭ ಇದು ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಮತ್ತು (೪ಕ್ಷ+೭)(೪ಕ್ಷ-೧)$$

$$(೨ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ-೫) ಇದು ಲ.ಸಾ.ವಿ.$$

೪.೧೦. ಮೇಲೆ ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದ ಒಂದೇ ಇರುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಅದು ಲೋಪವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿಯ ಮತ್ತು ಬೇರೀಜಿನ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತಿಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $೧೨೨೩-೪೪೨+೪೯೨-೧೫$ ಮತ್ತು $೪೨೩-೨೨೩-೧೨೨+೨೦$ ಇಂಥ ಜೋಡಿ ಇದ್ದರೆ ಏನು ಮಾಡುವದು? ಇಲ್ಲಿ ರಾಶಿಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯ ಯಾವುದೇ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದಿಲ್ಲ.

೧೫ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೩ ಇರುವದು. ೧೫ ರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು ೯ ರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟು ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಏನು ಕಂಡು ಬರುವದು? ೧೫ ರ ಮುಮ್ಮಡಿಯಲ್ಲಿ ೯ ರ ನಾಲ್ಕಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬೇರೀಜು ೨೧ ಆಗುವದು.

೩ ಇದು ಲಗರ ಗುಣಕವಿದೆ. ವಜಾಬಾಕಿಯು ೯.೩ ಇದು ೯ ರ ದಾದರೂ ಗುಣಕವಿರುವದು.

೩೨ ಮತ್ತು ೫೭ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವು ೮. ೫೭ ರ ಇಮ್ಮಡಿ ಮತ್ತು ೩೨ ರ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇವುಗಳೇ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ೨೦೮ ಆಗುವದು. ೮ ಅದು ೨೦೮ನಲ್ಲಿ ಗುಣಕವಿದೆ. ವಜಾಬಾಕಿಯು ೧೩. ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ೮ ಅದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಮೊದಲನೆಯದರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟಿ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನಲ್ಲಿ ದುಟ್ಟು ವಜಾಬಾಕಿಯಲ್ಲಿ ಸದಾ ಇರುವದು.

ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಮು ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ತ=ಮುಕ ಮತ್ತು ದ=ಮುಗ (ತ ಮತ್ತು ಗ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತ ಮತ್ತು ದ ಗಳನ್ನು ಮು ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗವುಗಳೆ).

∴ ಚತುಃಚಮುಕ ಮತ್ತು ಜದ=ಜಮಗ (ಚ ಮತ್ತು ಜ ಇವು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವವು).

∴ ಚತ+ಜದ ಚಮುಕ+ಜಮಗ=ಮು (ಚಕ+ಜಗ) ಮತ್ತು ಚತ=ಜದ=ಚಮುಕ=ಜಮಗ=ಮು (ಚಕ-ಜಗ). ಇದರ ಕರ್ಮವೇನೆಂದರೆ, ಎರಡು ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದರೆ ಅದು ಒಂದು ರಾಶಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಗೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ ೨. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ದಾಗೂ ಅವುಗಳ ಅಂತರದ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಎರಡನೇಯದರ ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತವೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಬರುವದು. ಚತ=ಜ=ಗು ದಿಂದ ಹಿಡಿದರೆ ಎರಡನೇ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಮೊದಲೆಯುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಜೋಡಿಯ ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ.

ಉ. ೩. ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ೩ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ೪ ಗುಣಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ನೋಡಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ೪೨ ಪದವು ಶೇಷವಾಗುತ್ತದೆ.

$$೩ \times \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯು} - \text{ನೋಡಲನೇ ರಾಶಿ} = ೧೨೪೨ - ೨೪೪೨ - ೫೧೪ + ೪೦$$

$$= (೧೨೪೨ - ೪೪೪೨ + ೪೪೪ - ೧೫)$$

$$= ೨೦೪೨ - ೧೦೦೪ + ೧೦೫$$

$$= ೫(೪೪೨ - ೨೦೪ + ೨೧)$$

$$= ೫(೨೪ - ೩)(೨೪ - ೩)$$

೫ ಇದು ಯಾವದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಲ್ಲ. ಮೂಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ೧೫ ಮತ್ತು ೩೦ ಇರುವುದರಿಂದ ೨೪ - ೩ ಇದಾದರೂ ಗುಣಕವಿರುವದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ೨೪ + ೩ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರುವದು. ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಡಿಸಿ ನೋಡುವಾ.

$$೧೨೪೨ - ೪೪೪೨ + ೪೪೪ - ೧೫$$

$$= ೧೨೪೨ - ೧೪೪೨ - ೨೪೪೨ + ೩೪೪೨ + ೧೦೪ - ೧೫$$

$$= ೪೪೨(೨೪ - ೩) - ೧೩೪(೨೪ - ೩) + ೫(೨೪ - ೩)$$

$$= (೨೪ - ೩)(೪೪೨ - ೧೩೪ + ೫)$$

$$= (೨೪ - ೩)(೨೪ - ೧)(೪೪ - ೫)$$

$$೪೪೨ - ೪೪೨ - ೧೩೪ + ೩೦ = ೪೪೨ - ೪೪೨ - ೨೪೨ + ೩೪೨ - ೨೦೪ + ೩೦$$

$$= ೨೪೨(೨೪ - ೩) - ೪(೨೪ - ೩) - ೧೦(೨೪ - ೩)$$

$$= (೨೪ - ೩)(೨೪೨ - ೪ - ೧೦)$$

$$= (೨೪ - ೩)(೨೪ - ೫)(೪ + ೨)$$

∴ ೨೪ - ೩ ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು (೪ + ೨)(೨೪ - ೫)

(೨೪ - ೩)(೨೪ - ೧)(೪೪ - ೫) ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನೋಡಲನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಎರಡನೇ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೂ ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸ್ವರವನ್ನು ಲೋಪವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 & ೨ \times \text{ಮೊದಲನೇ ರಾಶಿ} + \text{ಎರಡನೇ ರಾಶಿ} \\
 &= ೨೪೮ - ೪೮೮ + ೯೮೮ - ೪೦ + ೪೮೮ - ೪೮೮ - ೧೭೮ + ೪೦ \\
 &= ೨೪೮ - ೯೭೮ + ೪೧೬ \\
 &= ೮(೨೮ - ೧)(೧೪೮ - ೨೭) \\
 &= ೮(೨೮ - ೧)(೧೪೮ - ೨೭)
 \end{aligned}$$

ಈ ಇದು ಯಾವುದೇ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕವಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ೧೫ ಮತ್ತು ೪೦ ಇವುಗಳಿಗೆ ೨೭ ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ೨೮-೧ ಇದು ಸಾಧಾರಣ ವಿಭಾಜಕವಿರುವುದರಿಂದ ಅನುಸೂಚಿತವಾಗಿದೆ.

೪.೧೧. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಎಲ್ಲ ಗುಣಕಗಳ ಸಮಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುವುದು ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ಸಿದ್ಧಮಾಡಬಹುದು.

ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ಮತ್ತು ಲ ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇದ್ದರೆ ತ ≡ ಮಕ ಮತ್ತು ದ ≡ ಮಗ (ಕ ಮತ್ತು ಗ ಇವು ತ ಮತ್ತು ದ ಗಳಿಗೆ ಮ. ವಿಂದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಭಾಗವಿವುಗಳು).

ಈಗ ಮ. ಇದು ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಕ ಮತ್ತು ಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಗುಣಕಗಳಿಲ್ಲ. ಅದುದರಿಂದ ತ ಮತ್ತು ದ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಮಕಗ. ಲ. - ಮಕಗ, ಅಂದರೆಯೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ಇದು ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೨. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೪೦. ೨ ಇದು ೪೦ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ೨೨ ಮತ್ತು ೨೭ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೮, ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೨೪. ೮ ಇದು ೨೨೪ ರ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಅಕಯ. ಯ ಇದು ಅಕಯದ ಒಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

ನಿದ್ಧಾಂತ ೩. ಯಾವದೇ ರಾಶಿಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಲ್ಲಿ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದೊಂದು ಗುಣಕವಿರುತ್ತದೆ.

೪.೧೨. \therefore ತ \equiv ಮಕ, ದ \equiv ಮಕ, ಮತ್ತು ಲ \equiv ಮಕಗ,
 \therefore ತ \times ದ \equiv ಮಕ \times ಮಕ
 \equiv ಮಕಗ \times ಮ
 \equiv ಲ \times ಮ | \therefore ತದ = ಲಮ

ಅಂದರೆ ಯಾವದೇ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ. ನೋದಲನೇ ರಾಶಿ \times ಎರಡನೇ ರಾಶಿ \equiv ಲ. ಸಾ. ವಿ. \times ಮ. ಸಾ. ವಿ.

ನಿದ್ಧಾಂತ ೪. ಂಷ ಮತ್ತು ೯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೩ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೪೫. \therefore ಂಷ \times ೯ = ೦೩೫; ೩ \times ೪೫ = ೦೩೫; ೩ ಮತ್ತು ೫ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಲ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೨೪೪. ೩ \times ೫ = ೦೨೯೨; ೪ \times ೨೪೪ = ೦೨೯೨. ಆಯ ಮತ್ತು ಕಯ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಅಕಯ ಅಯ \times ಕಯ = ಅಕಯ; ಯ \times ಅಕಯ = ಅಕಯ.^೨

ಈ ನಿತ್ಯಸಮಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. (ಇಲ್ಲವೇ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ). ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಗತಿಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವದೂ ಮೂರು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕನೆಯದನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

$$\text{ಇಷ್ಟರಾಶಿಯು} = \frac{\text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ}}$$

$$\text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.} = \frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.}}$$

$$\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} = \frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ}}{\text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}$$

$$\text{ತದ=ಲಸು} \quad \therefore \text{ಲ} = \frac{\text{ತದ}}{\text{ಮು}} \text{ ಮತ್ತು } \text{ಮ} = \frac{\text{ತದ}}{\text{ಲ}}.$$

ಉ.ಇ. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\text{ಅಯ}+೫$ ಮತ್ತು $\text{ಅಯ} - ೧$ ಅಯ - ೨ ಅಯ + ೧ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು $\text{ಅಯ}+೨$ ಅಯ - ೫ ಇಷ್ಟೆ ಬೇರೆ ರಾಶಿಯು ಯಾವುದು ?

ಇಂಥ ಪ್ರಕಾರದ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮೊಟ್ಟೆಗೆ ಬರಬೇಕೆಂದು ಹಾಣುತ್ತವೆ. ಇವರ ಸಹಮಾನ್ಯ ಅಕ್ಷ ಬರಬೇಕು ಅಥವಾ ಸಹಜ ಬೇಗ ನಿಂಬುವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿ ದ. ರಾ. ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇವುಗಳ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಗುಣಕವಿರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಸಾಸ್ರ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯ ಗುಣಕ ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡುವಾ. ತರುವಾಯ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯ ಗುಣಕ ಫಲಕವನ್ನು ಮಾಡಿ

$$\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯು} = \text{ಅಯ} + ೨ \text{ ಅಯ} - ೫$$

$$= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)$$

$$\text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.} = \text{ಅಯ} - ೧ \text{ ಅಯ} - ೨ \text{ ಅಯ} + ೧$$

$$= \text{ಅಯ} + ೧ \text{ ಅಯ} - ೨ \text{ ಅಯ} - ೨ \text{ ಅಯ} + ೧ \text{ ಅಯ} + ೧$$

$$= ೨ \text{ ಅಯ}(\text{ಅಯ} + ೫) - ೨ \text{ ಅಯ}(\text{ಅಯ} + ೫) + ೨(\text{ಅಯ} + ೫)$$

$$= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೨ \text{ ಅಯ} + ೨)$$

$$= \text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)(\text{ಅಯ} - ೨)$$

$$\therefore \text{ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} = \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ.}}$$

$$= \frac{\text{ಅಯ} + ೫) \times (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)(\text{ಅಯ} - ೨)}{(\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೧)}$$

$$= (\text{ಅಯ} + ೫)(\text{ಅಯ} - ೨)$$

$$= \text{ಅಯ} - ೨ \text{ ಅಯ} - ೧$$

[* ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಂತೆ ಕೊಡುವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ವಿಸ್ತಾರವಿರುವ ಬರೆಯಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಆದನ್ನು ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಡಲು ಏನೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ]

ನಂ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿಯ ಗುಣಸ್ವಭವವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಶುಭವಾದುದು.

$$\begin{aligned}
 & ೧೨ಯಃ - ೨೨ಯಃ - ೧೦ಯಃ + ೧೦ \\
 & = ೧೨ಯಃ - ೩೦ಯಃ + ೨೨ಯಃ - ೫ಯಃ - ೪ಯಃ + ೧೦ \\
 & = ೬ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) + ೨೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) - ೨(೨ಯಃ - ೫) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೬ಯಃ + ೨೨ಯಃ - ೨) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೩ಯಃ + ೨)
 \end{aligned}$$

ಈ ರಾಶಿಯ ಅವಯವಗಳು ತಿಳಿದ ನಂತರ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಯ ಗುಣ-ಸ್ವಭವವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭವಿದೆ.

$$\begin{aligned}
 & ೪೨ಯಃ - ೧೬ಯಃ - ೨೨ಯಃ - ೧೧೬ಯಃ + ೫೩ಯಃ + ೩೦ \\
 & = ೪೨ಯಃ - ೧೨೦ಯಃ + ೧೦೪ಯಃ - ೨೦೦ಯಃ + ೩೬೨ಯಃ - \\
 & \quad ೯೦ಯಃ - ೨೬ಯಃ + ೬೫ಯಃ - ೧೩ಯಃ + ೩೦ \\
 & = ೨೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) + ೫೩ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) + \\
 & \quad ೧೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) - ೧೩ಯಃ(೨ಯಃ - ೫) - ೬(೨ಯಃ - ೫) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨೨ಯಃ + ೫೩ಯಃ + ೧೨ಯಃ - ೧೩ಯಃ - ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫) \\
 & (೨೨ಯಃ - ೧೩ಯಃ + ೬೫ಯಃ - ೩೨ಯಃ + ೫೦ಯಃ - ೨೫ಯಃ + ೧೨ಯಃ - ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫) \{ ೧೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೧) + ೩೨ಯಃ(೨ಯಃ - ೧) + \\
 & \quad ೨೫ಯಃ(೨ಯಃ - ೧) + ೬(೨ಯಃ - ೧) \} \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೧೨ಯಃ + ೩೨ಯಃ + ೨೫ಯಃ + ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧) \\
 & \quad (೧೨ಯಃ + ೨೨ಯಃ + ೨೨ಯಃ + ೧೬ಯಃ + ೯ಯಃ + ೬) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧) \{ ೪ಯಃ(೩ಯಃ + ೨) + ೨೨ಯಃ(೩ಯಃ + ೨) \\
 & \quad + ೩(೩ಯಃ + ೨) \} \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೩ಯಃ + ೨)(೪ಯಃ + ೨೨ಯಃ + ೩) \\
 & = (೨ಯಃ - ೫)(೨ಯಃ - ೧)(೩ಯಃ + ೨)(೨ಯಃ + ೩)(೨ಯಃ + ೧)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} &= \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}} \\ &= \frac{(ಅಯ-೫) \times (ಅಯ-೫)(ಅಯ-೧)(ಅಯ+೨)(ಅಯ+೩)(ಅಯ+೧)}{(ಅಯ-೫)(ಅಯ-೧)(ಅಯ+೨)} \\ &= (ಅಯ-೫)(ಅಯ+೩)(ಅಯ+೧). \end{aligned}$$

ಶ್ರೀಘ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೀತಿ : ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಯು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು ಅವಯವವಿರುವದು, ಆದುದರಿಂದ ೧೨ಯ^೨ ಮತ್ತು ೧೦ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೪ಯ^೨ ಮತ್ತು ೩ ಇವುಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ೪೮ಯ^೨ ಮತ್ತು ೩೦ ಬರುವವು, ಮತ್ತು ೪ಯ^೨ ಮತ್ತು —೨೮ಯ^೨ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ —೧೦೨ಯ^೨, ಇದನ್ನು —೧೬ಯ^೨ ದೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದು ಬರುವ ಶೇಷವು ೯೬ಯ^೨, ಇದಕ್ಕೆ ೧೨ಯ^೨ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ೮ಯ^೨ ಬರುವದು. ಆದುದರಿಂದ

$$\begin{aligned} & ೪೮ಯ^೨ — ೧೬ಯ^೨ — ೨೮ಯ^೨ — ೧೦೨ಯ^೨ + ೫೩ಯ^೨ + ೩೦ \\ &= (೧೨ಯ^೨ — ೨೮ಯ^೨ — ೯ಯ^೨ + ೧೦)(೪ಯ^೨ + ೮ಯ^೨ + ೩) \\ & \quad [ಬಾಯಿಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬೇಕು.] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ಇಷ್ಟ ರಾಶಿಯು} &= \frac{\text{ಮ. ಸಾ. ವಿ.} \times \text{ಲ. ಸಾ. ವಿ.}}{\text{ಗೊತ್ತಿದ್ದ ರಾಶಿ}} \\ &= \frac{(ಅಯ-೫)(೧೭ಯ^೨ — ೨೯ಯ^೨ — ೯ಯ^೨ + ೧೦)(೪ಯ^೨ + ೮ಯ^೨ + ೩)}{(೧೨ಯ^೨ — ೨೮ಯ^೨ — ೯ಯ^೨ + ೧೦)} \\ &= (ಅಯ-೫)(೪ಯ^೨ + ೮ಯ^೨ + ೩). \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೧. ಕ್ಷ^೨ + ೪ಕ್ಷ^೨ — ೧೧ಕ್ಷ^೨ — ೩೦; ೨ಕ್ಷ^೨ — ೩ಕ್ಷ^೨ — ೫೯ಕ್ಷ^೨ + ೩೦.
೨. ೧೨ಪ^೨ — ೨೮ಪ^೨ + ೧೭ಪ^೨ — ೩; ೧೨ಪ^೨ + ೮ಪ^೨ — ೪೯ಪ^೨ + ೧೫.
೩. ೨೦ಪ^೨ + ೭ಪ^೨ — ಪ — ೨; ೧೦ಪ^೨ — ೨೪ಪ^೨ + ೨೩ಪ^೨ — ೬.
೪. ೮ಯ^೨ ೬೨ಯ^೨ + ೭೯ಯ^೨ + ೩೨ಯ^೨ — ೧೨;

$$೮ಯ^೨ — ೫೪ಯ^೨ + ೮೧ಯ^೨ + ೩೧ಯ^೨ — ೧೨.$$

೫. $೫ಕ್ಷೃ + ೧೨ಕ್ಷೃ - ೪೪ಕ್ಷೃ + ೧೪೦ಕ್ಷೃ - ೪೪$;

$೪ಕ್ಷೃ - ೯ಕ್ಷೃ - ೯೯ಕ್ಷೃ + ೬೬ಕ್ಷೃ + ೭೨$.

೬. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ
 $೨೫ಕ್ಷೃ + ೨೦ಕ್ಷೃ + ೪$ ಮತ್ತು $೨೫ಕ್ಷೃ + ೨೦ಕ್ಷೃ - ೨೧ಕ್ಷೃ -$
 $೨೦ಕ್ಷೃ - ೪$ ಇದ್ದು ಒಂದು ರಾಶಿಯು $೨೫ಕ್ಷೃ + ೪೫ಕ್ಷೃ + ೨೪ಕ್ಷೃ + ೪$
 ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯು ಯಾವದು?

೭. ಮೂರು ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು ಯು—೫ ಇದ್ದು
 ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ಯು—೨ಯು—೨೫ಯು+೨೬ಯು+೧೨೦
 ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು?

೮. ಮೂರು ದ್ವಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ೨೫—೧ ಇದ್ದು
 ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯು, ೮೧ನು—೪೫ನು+೪ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು
 ಯಾವವು?

೯. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೧೦ನು+೧೧ನು—೬
 ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೧೦೦ನು—೨೪೧ನು+೩೬ ಇದ್ದರೆ ಆ
 ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು?

೧೦. ಮೂರು ತ್ರಿಕೋಟಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ೮ಯು—೧೮ಯು—೫
 ಇದ್ದು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೩೨ಯು—೮೦ಯು—೨೯೦ಯು+
 $೭೨೫ಯು+೧೮ಯು-೪೫$ ಇದ್ದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ಯಾವವು?

೧೧. ಪಯು—೨೧ಯು+೪೫ಯು+ಮ ಮತ್ತು ಪಯು—೪೫ಯು+
 $೧೨೩ಯು-ಮ$ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು—೭ ಇದ್ದರೆ
 ಪ = ?, ಮ = ?

೧೨. ೭ಯು+೨೪ಯು+ಕಯು+೧೦ ಮತ್ತು ಪಯು—೨೭ಯು+
 $೭೫ಯು+ಮ$ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯು—೩ಯು+೨ ಇದ್ದರೆ
 ಅ = ?, ಕ = ?, ಪ = ?, ಮ = ?.

ಐದನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

ಜಿ.೧. ಪೈಪಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಗುರುತು ಹೋದ ವರ್ಷ-
ಪಲ್ಲಿಯೇ (ಭಾಗ ೨. ಪು. ೧೦೧-೨೦೦) ನಮಗೆ ಅಗಿರುತ್ತವೆ. ಇಂದು ಈಗ
ಮೊದಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಉಪಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಅದೇ ವಿಷಯದ
ಮುಂದಿನ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

೧.

ಜಿ.೨. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ-
ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಅದುವರಿಂದ ಅವುಗಳ
ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಯಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಭಾಗಿಸಿ ಅದರಂತೆಯೇ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ
ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಕ್ಷೇಪ-
ವನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಎಂಬ ನಾವು ಒಂದೆರೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ
ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\text{ಉ. ೧.} \quad \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{೨(೨+೨೨)}{೨(೨+೨೨)} = \frac{೨+೨೨}{೨+೨೨}$$

$$\text{ಉ. ೨.} \quad \frac{೩೨+೨೨}{೩೨+೨೨} = \frac{೩(೨+೨೨)}{೩(೨+೨೨)} = \frac{೩}{೩}$$

$$\text{ಉ. ೩.} \quad \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{೨೨(೨+೨೨)}{೨೨(೨+೨೨)} = \frac{೨+೨೨}{೨+೨೨}$$

$$\text{ಉ. ೪.} \quad \frac{೨೨-೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{(೨+೨೨)(೨-೨೨)}{(೨+೨೨)²} = \frac{೨-೨೨}{೨+೨೨}$$

$$\text{ಉ. ೫.} \quad \frac{೨೨+೪೨}{೨೨+೪೨} = \frac{(೨+೨೨)(೨+೨೨)}{(೨+೨೨)²}$$

$$= \frac{(೨+೨೨)(೨-೨೨+೨೨)}{(೨-೨೨+೨೨)(೨+೨೨+೨೨)}$$

$$= \frac{೨+೨೨}{೨+೨೨+೨೨}$$

ಉ. ೧. $\frac{೧೦ಯ-೨ಯ-೨೭}{೨೦ಯ-೧೧ಯ-೪೫}$

$$= \frac{(೨ಯ+೨)(೫ಯ-೯)}{(೪ಯ+೫)(೫ಯ-೯)} = \frac{೨ಯ+೨}{೪ಯ+೫}$$

ಉ. ೨. $\frac{೪ಅ-೯ಕ-೧೨ಅ+೧೨ಕ+೫}{೮ಅ-೨೪ಅಕ+೧೮ಕ-೮ಅ+೧೨ಕ+೨}$

ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} & \frac{೪ಅ-೯ಕ-೧೨ಅ+೧೨ಕ+೫}{೮ಅ-೨೪ಅಕ+೧೮ಕ-೮ಅ+೧೨ಕ+೨} \\ &= \frac{(೪ಅ-೧೨ಅ+೯)-(೯ಕ-೧೨ಕ+೪)}{(೮ಅ-೨೪ಅ+೨)-(೨ಕ-೨)} \\ &= \frac{(೮ಅ-೨+೨ಕ-೨)(೮ಅ-೨-೨ಕ+೨)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \\ &= \frac{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \\ &= \frac{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \\ &= \frac{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \\ &= \frac{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \\ &= \frac{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \\ &= \frac{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)}{(೮ಅ+೨ಕ-೫)(೮ಅ-೨ಕ-೧)} \end{aligned}$$

ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ ನೋಡಲು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣವ್ಯುತ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಅದರಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವೆಂದು ಕಂಡು ಬಂದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಬೇಕು. ಗುಣವ್ಯುತ್ಕರಣ ಮಾಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಸುಲಭವಿರುವದೋ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ನೋಡಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು, ತರುವಾಯ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡನೆಯದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು

ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಸಂಕ್ಷೇಪ ಮಾಡಲು ಹೇಳಿದ್ದರಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಅನುವಾಗುವ ಇಷ್ಟೇ ಇರುವವು ಎಂದು ಗೃಹಿತ ಹಿಡಿದು ನಡೆಯಲು ವಿಸೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕೊಡಿದಿ.

- | | | | |
|-----|---|-----|---|
| ೧. | ೨ಯಿ + ೪ಯಕ್ಕೆ
೨ಯಿ + ೮ಯಕ್ಕೆ | ೩. | ೨ಅಪ + ೩ಅಬ — ೫ಅಮ
೨ಪು + ೩ಪಬ — ೫ಪಮ |
| ೨. | ಅ + ಅಕ + ಅಮ + ಕಮ
ಅಅ + ೪ಮ | ೪. | ಅ — ಮ
ಅ + ಮ |
| ೫. | ೪ಪು — ೨೪ಪಮ + ೪೪ಮ
೬ಪು — ೧೪ಪಮ — ೭ಮ | ೬. | ೬೪ಅ + ೮೦ಅಕ + ೨೫ಕ
೧೬ಅ — ೨೨ಅಕ — ೨೦ಕ |
| ೭. | ೬ಯ — ೨೩ಯ + ೨
೧೨ಯ — ೭ಯ + ೧ | ೮. | ೮೦ಕ್ಷ + ೨ಕ್ಷ — ೧೩
೧೬ಕ್ಷ + ೩೪ಕ್ಷ — ೧೫ |
| ೯. | ಯ — ೫ಯ — ೪ಯ + ೨೦
ಯ — ಯ — ೩ಯ + ೬೦ | ೧೦. | ೧೦ಪ — ೨೭ಪ + ೨೦ಪ ೩
೧೦ಪ + ೩ಪ — ೩೧ಪ + ೬ |
| ೧೧. | ೪ಯ + ೧೧ಯ + ೭ಯ + ೨
೧೬ಯ — ಯ + ೧ | ೧೩. | ನ — ೨ನ — ೨೯ನ — ೪೨
ನ — ೩೯ನ — ೭೦ |
| ೧೩. | ಮ + ೨ಮ. ೨೩ಮ ೬೦
ಮ — ೩ಮ — ೨೩ | | |
| ೧೪. | ಮ — ೨೦ಮ + ೬೪
ಮ — ೪ಮ — ೧೭ಮ + ೩ಮ + ೬೪ | | |
| ೧೫. | ಯ — ೨೪ಯ + ೧೯ಯ — ೫೦
ಯ — ೮ಯ — ೬೪ಯ + ೫೧ | | |
| ೧೬. | ಪ — ೨೫೬
೨ಪ — ೩೧ಪಮ — ೧೬ಮ | | |
| ೧೭. | (೨ಯ + ೧)(೨ಯ + ೩)(೨ಯ + ೫)(೨ಯ + ೭) + ೧೫
೮ಯ + ೬೪ಯ + ೧೬೮ಯ — ೫೦ | | |

ಅ — ಒಳಕ

೧೦. $ಅ + ಅಅಕ + ಒಅಅಕ + ಒಅಕ$

೧೧. $ಅಅ — ಅಕ + ಅಗ + ಅಂಕ$

೧೨. $ಅಅ — ಅಕ — ಅಗ + ಅಂಕ$

೧೩. $ಅ — ಅಅ + ಅಅಅ — ಅಂಕ + ಅ$

೧೪. $ಅ — ಅಅ — ಅಅಅ + ಅಅ + ಅ$

೨.

ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ.

೫.೩. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನಾನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು.೧೦, ಪು. ೧೦೦-೧೦೪) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅರಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಸೇವಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭೇದಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಯಾವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬರುವದೋ ಅವೇ ಇರುವದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಬೇಕು ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕೆಂದು ಎಲ್ಲ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳನ್ನು ನೋಡಲು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವಯವ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಜೇರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವ ಭಾಗಸುಪ-ದೇಂದರೆ ನೋವಲನೆಯದನ್ನು ಎರಡನೆಯದರ ಪುಕ್ಕವಾದಿಂದ ಗುಣಿಸುವದು.

ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಮಾಡಿದೆ. ಈಗ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳ ಗುಣಸ್ವಭಕ್ತರೂಪವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅಲ್ಲಿ ತೋರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಕೊನೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು (ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು) ಅತಿ ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೧. } & \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ} \times \frac{ಅ+ಅಕ+ಕ}{ಅ-ಅಕ+ಕ} \\ &= \frac{(ಅ+ಕ)(ಅ-ಕ)}{(ಅ+ಕ)(ಅ-ಅಕ+ಕ)} \times \frac{(ಅ-ಅಕ+ಕ)(ಅ+ಅಕ+ಕ)}{(ಅ-ಕ)^2} \\ &= \frac{ಅ+ಅಕ+ಕ}{ಅ-ಕ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೨. } & \frac{ಯ+ಬಕ್ಷ}{ಅಯ-ಗಯಕ್ಷ-ಬಕ್ಷ} \div \frac{ಯ+ಯಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ}{ಅಯ-ಗಯಕ್ಷ-ಬಕ್ಷ} \\ &= \frac{ಯ+ಬಕ್ಷ}{ಅಯ-ಗಯಕ್ಷ-ಬಕ್ಷ} \times \frac{ಅಯ-ಗಯಕ್ಷ-ಬಕ್ಷ}{ಯ+ಯಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ} \\ &= \frac{(ಯ+ಅಕ್ಷ)^2-ಬಯಕ್ಷ}{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಯ+ಕ್ಷ)} \times \frac{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಬಯ+ಅಕ್ಷ)}{ಯ-ಕ್ಷ+ಯಕ್ಷ-ಕ್ಷ} \\ &= \frac{(ಯ+ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)(ಯ-ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)}{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಯ+ಕ್ಷ)} \\ &\quad \times \frac{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಬಯ+ಅಕ್ಷ)}{ಯ-ಕ್ಷ+ಕ್ಷ(ಯ-ಕ್ಷ)} \\ &= \frac{(ಯ+ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)(ಯ-ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)}{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಯ+ಕ್ಷ)} \\ &\quad \times \frac{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಬಯ+ಅಕ್ಷ)}{(ಯ-ಕ್ಷ)(ಯ+ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)} \\ &= \frac{(ಯ+ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)(ಯ-ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)}{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಯ+ಕ್ಷ)} \\ &\quad \times \frac{(ಅಯ-ಬಕ್ಷ)(ಬಯ+ಅಕ್ಷ)}{(ಯ-ಕ್ಷ)(ಯ+ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)} \\ &= \frac{(ಬಯ+ಅಕ್ಷ)(ಯ-ಅಯಕ್ಷ+ಅಕ್ಷ)}{(ಯ+ಕ್ಷ)(ಯ-ಕ್ಷ)} \end{aligned}$$

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದಿಲ್ಲವೋ ಅವುಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೩. } & \frac{\text{ಅಪ} - \text{ಅಪ} - \text{೧೬}}{\text{ಅಪ} + \text{೧೬ಪ} + \text{೮}} \times \frac{\text{ಪ} + \text{೧೬ಪ} + \text{೨೫}}{\text{ಪ} - \text{೩ಪ} + \text{೧೬ಪ} + \text{೧೬}} \\
 & \quad \div \frac{\text{೨ಪ} - \text{೧೬}}{\text{೩ಪ} - \text{೧೬ಪ} - \text{೧೦೮}} \\
 = & \frac{೧(\text{೨ಪ} - \text{೬ಪ} - ೪)}{೨(\text{೨ಪ} + ೧೬ಪ + ೮)} \times \frac{(\text{ಪ} + ೧೬)^೨ - ೧೬ಪ}{\text{ಪ} + \text{ಪ} - ೩ಪ - ೪ಪ + ೧೬ಪ + ೧೬} \\
 & \quad \times \frac{೨(\text{ಪ} - ೫ಪ - ೩೬)}{೨(\text{ಪ} - ೬೪)} \\
 = & \frac{೨(\text{ಪ} - ೪)(೨ಪ + ೧)}{(\text{ಪ} + ೪)(೨ಪ + ೧)} \times \frac{(\text{ಪ} - ೫ಪ + ೧೬)(\text{ಪ} + ೪ಪ + ೧೬)}{\text{ಪ}(\text{ಪ} + ೧) - ೪ಪ(\text{ಪ} + ೧) + ೧೬(\text{ಪ} + ೧)} \\
 & \quad \times \frac{೩(\text{ಪ} + ೪)(\text{ಪ} - ೯)}{೨(\text{ಪ} - ೪)(\text{ಪ} + ೪ಪ + ೧೬)} \\
 = & \frac{೨(\text{ಪ} - ೪)}{(\text{ಪ} + ೪)} \times \frac{(\text{ಪ} - ೪ಪ + ೧೬)(\text{ಪ} + ೪ಪ + ೧೬)}{(\text{ಪ} + ೧)(\text{ಪ} - ೫ಪ + ೧೬)} \\
 & \quad \times \frac{೩(\text{ಪ} + ೪)(\text{ಪ} - ೯)}{೨(\text{ಪ} - ೪)(\text{ಪ} + ೪ಪ + ೧೬)} \\
 = & \frac{೩(\text{ಪ} - ೯)}{\text{ಪ} + ೧}
 \end{aligned}$$

ಯಾವ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದದ್ದೋ ಅವುಗಳ ಗುಣಪ್ರಥಕ್ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡುವದು ಷಷ್ಟವಾದುದು. ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ ರಾಶಿಗಳ ಅವಯವಗಳನ್ನು ರ್ಶಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೪. } & \frac{\text{೬ಯ} + \text{೧೧ಯ} + \text{ಯ} - ೪}{\text{೧೨ಯ} + ೫ಯ - \text{೧೧ಯ} - ೬}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೫ಯ್ಯಿ} - \text{೧೪} \\ \times & \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + \text{೬೬ಯ್ಯಿ} + \text{೪೦} \\ & \text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೫ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - ೭ \\ \div & \text{೪೦ಯ್ಯಿ} - \text{೫ಯ್ಯಿ} - \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - \text{೨೪} \end{aligned}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೧೧ಯ್ಯಿ} + \text{ಯ್ಯಿ} - ೪$$

$$\begin{aligned} &= \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೫ಯ್ಯಿ} + \text{೫ಯ್ಯಿ} - ೪ಯ್ಯಿ - ೪ \\ &= \text{೬ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೧) + \text{೫ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೧) - ೪(\text{ಯ್ಯಿ} + ೧) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೧)(\text{೬ಯ್ಯಿ} + ೫ಯ್ಯಿ - ೪) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೧)(೭ಯ್ಯಿ - ೧)(೨ಯ್ಯಿ + ೩) \end{aligned}$$

$$\text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೫ಯ್ಯಿ} - \text{೧೧ಯ್ಯಿ} - ೬$$

$$\begin{aligned} &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೭ಯ್ಯಿ} + \text{೬ಯ್ಯಿ} - ೬ \\ &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + \text{೧೭ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + ೬(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(\text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೭ಯ್ಯಿ} + ೬) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(೨ಯ್ಯಿ + ೨)(೪ಯ್ಯಿ + ೩) \end{aligned}$$

$$\text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೧೭ಯ್ಯಿ} - \text{೧೫ಯ್ಯಿ} - ೧೪$$

$$\begin{aligned} &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ} - \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೯ಯ್ಯಿ} - \text{೨೯ಯ್ಯಿ} + \text{೧೪ಯ್ಯಿ} - ೧೪ \\ &= \text{೧೨ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + \text{೨೯ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) + ೧೪(\text{ಯ್ಯಿ} - ೧) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(\text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೯ಯ್ಯಿ} + ೧೪) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} - ೧)(೨ಯ್ಯಿ + ೨)(೪ಯ್ಯಿ + ೩) \end{aligned}$$

$$\text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + \text{೬೬ಯ್ಯಿ} + ೪೦$$

$$\begin{aligned} &= \text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೧೨ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + ೪೬ಯ್ಯಿ + ೨೦ಯ್ಯಿ + ೪೦ \\ &= \text{೬ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೨) + \text{೨೫ಯ್ಯಿ}(\text{ಯ್ಯಿ} + ೨) + ೨೦(\text{ಯ್ಯಿ} + ೨) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೨)(\text{೬ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} + ೨೦) \\ &= (\text{ಯ್ಯಿ} + ೨)(೨ಯ್ಯಿ + ೫)(೨ಯ್ಯಿ + ೪) \end{aligned}$$

$$\text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೫ಯ್ಯಿ} + \text{೨೫ಯ್ಯಿ} - ೭$$

$$= \text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೪೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೦ಯ್ಯಿ} + \text{೧೦ಯ್ಯಿ} - ೭ಯ್ಯಿ - ೭$$

$$= \text{ಅಯೌ}(\text{ಯ} + ೧) + ೧೦\text{ಯ}(\text{ಯ} + ೧) - ೨(\text{ಯ} + ೧)$$

$$= (\text{ಯ} + ೧)(\text{ಅಯೌ} + ೧೦\text{ಯ} - ೨)$$

$$= (\text{ಯ} + ೧)(೨\text{ಯ} - ೧)(೪\text{ಯ} + ೨)$$

$$\text{ಅಯೌ} - ೫\text{ಯೌ} - ೩೫\text{ಯ} - ೨೪$$

$$= \text{ಅಯೌ} + ೪\text{ಯೌ} - ೧೩\text{ಯೌ} - ೨೬\text{ಯ} - ೧೨\text{ಯ} - ೨೪$$

$$= \text{ಅಯೌ}(\text{ಯ} + ೨) - ೧೩\text{ಯ}(\text{ಯ} + ೨) - ೧೨(\text{ಯ} + ೨)$$

$$= (\text{ಯ} + ೨)(\text{ಅಯೌ} - ೧೩\text{ಯ} - ೧೨)$$

$$= (\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} - ೪)(೪\text{ಯ} + ೨)$$

∴ ರಾಶಿಯು

$$= \frac{(\text{ಯ} + ೧)(೨\text{ಯ} - ೧)(೩\text{ಯ} + ೪)}{(\text{ಯ} - ೧)(೩\text{ಯ} + ೨)(೪\text{ಯ} + ೨)} \times$$

$$\frac{(\text{ಯ} - ೧)(೩\text{ಯ} + ೨)(೪\text{ಯ} + ೨)}{(\text{ಯ} + ೨)(೨\text{ಯ} + ೫)(೩\text{ಯ} + ೪)} \times$$

$$\frac{(\text{ಯ} + ೨)(\text{ಯ} - ೪)(೪\text{ಯ} + ೨)}{(\text{ಯ} + ೧)(೨\text{ಯ} - ೧)(೪\text{ಯ} + ೨)}$$

$$= \frac{\text{ಯ} - ೪}{೨\text{ಯ} + ೫}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡು.

$$೧. \frac{\text{ಅೌ} - \text{ಮೌ}}{೨\text{ಅೌ} - ೪\text{ಅಮೌ} + ೨\text{ಮೌ}} \times \frac{೨\text{ಅೌ} - ೨\text{ಮೌ}}{\text{ಅೌ} + \text{ಮೌ}}$$

$$೨. \frac{\text{ಪೌ} - \text{ಬೌ}}{\text{ಪೌ} + \text{ಪೌಬೌ} + \text{ಬೌ}} \times \frac{೫\text{ಪೌ} + ೫\text{ಬೌ}}{೨\text{ಪೌ} - ೪\text{ಬೌ}}$$

$$೩. \frac{\text{ಅಕ್ಷೌ} - ೪\text{ಕ್ಷೌ} - ೧೫}{೧೨\text{ಕ್ಷೌ} + ೨೯\text{ಕ್ಷೌ} + ೧೪} \times \frac{೧೨\text{ಕ್ಷೌ} + ೧೩\text{ಕ್ಷೌ} - ೧೪}{೬\text{ಕ್ಷೌ} - ೧೯\text{ಕ್ಷೌ} + ೧೦}$$

$$೪. \frac{೧೦\text{ನೌ} - ೪೬\text{ನೌ} + ೨೪}{೬\text{ನೌ} - ೨೨\text{ನೌ} + ೧೨} \times \frac{೬\text{ನೌ} - ೧೫\text{ನೌ} + ೬}{೧೦\text{ನೌ} - ೨೬\text{ನೌ} + ೧೨}$$

५५—५५ ५५—५५
 ५५ + ५५ ÷ ५५ + ५५ + ५५

$$6. \frac{3^2 - 5^2 + 20}{5^2 - 10^2 + 108} \div \frac{3^2 + 2^2 - 5^2}{5^2 + 10^2 - 20}$$

೩. $\frac{40000 - 25000 + 20000}{40000 - 25000 + 40000} \div \frac{50000 - 30000 + 20000}{40000 - 30000 + 50000}$

೮. $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-a^2-b^2-c^2} \times \frac{a^3-b^3-c^3-3abc}{a^2-b^2-c^2+a^2+b^2+c^2}$

$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1$

ಗೃ. ಮೃ + ಇಮೃ - ಅಮೃ - ಅಳಿ
ಮೃ + ಉಮೃ + ಅಂಠಮೃ + ಅಂಠ

ಮೂ + ಲೋಮು + ಲಘು + ೧೨೦
ಮೂ + ೧೨ಮು + ಲಘು + ೬೦

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥
 ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥

$$\text{Ans. } \frac{25+25+2}{25+25+2} \times \frac{25+25+2}{25+25+2} \times \frac{25+25+2}{25+25+2}$$

ಗಿ. ೪ಪ್ರತಿ-ಮೃತಿ ನಿರಪತಿ + ೨ಪ್ರತಿ-ಮೃತಿ
 ೪ಪ್ರತಿ + ಮೃತಿ X ೪ಪ್ರತಿ-೨ಪ್ರತಿ-ಮೃತಿ

$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$

၇၈၁ - ၈၃၁ ၈၃၁ - ၈၈၁
 ၇၈၁ + ၈၃၁ - ၈၃၁ × ၈၃၁ - ၇၈၁ - ၈၈၁ ×

\times $ncc + \text{अक} - \text{अक}$

೧೫. $\frac{a^2+b^2-a-b}{a-b-3} \times \frac{a+b+a-b}{a+b-3}$

- $$\frac{2ಯಿ-2ಯ+2}{2ಯಿ+2ಯ+2}$$
೧೬. $\frac{ಪಿ-೧೨೫}{೬೫ಪಿ-೧} \div \frac{೮೫ಪಿ-೧೨೫}{೨೫೬೫ಪಿ+೧೬೫ಪಿ+೧} \div \frac{೫೫ಪಿ+೨೫೫ಪಿ+೬೫೫}{೬೫೫ಪಿ+೫೫ಪಿ-೨}$
೧೭. $\frac{೨ನಿ-೨ನಮ-೨ಮಿ}{೨ನಿ+೨ನಮ-೨ಮಿ}$
೧೮. $\left(\frac{೬ನಿ-೬ನಮ-೫ಮಿ}{ನಿ+೫ನಮ+೬ಮಿ} \times \frac{೫ನಿ+೨ನಮ-೧೨ಮಿ}{೬ನಿ-೧೬ನಮ+೫ಮಿ} \right)$
೧೯. $\frac{೮೫+೮೫೮+೮೫}{೫೮೫-೨೫೮೮-೫೮೫}$
- $$\div \left(\frac{೪೮೫-೪೮೮+೪೮೫}{೮೫-೨೫೮೫} \div \frac{೨೫೮೫-೮೫}{೫೮೫+೨೪೮೮-೫೮೫} \right)$$
೧೯. $\frac{೨೫೫+೫}{೫೫+೫೫+೧} \div \frac{೫೫+೫೫-೨}{೫೫+೧} \times \frac{೫೫-೧}{೫೫-೫೫+೨}$
೨೦. $\frac{೫೫-೫೫}{೫೫+೫೫} \times \frac{೫೫+೫೫+೫೫+೫೫}{೫೫+೫೫೫+೫೫} \div \frac{೫೫-೫೫}{೫೫+೫೫}$

೩.

ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ

೫.೪. ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದಿದ್ದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲು ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಷ್ಟೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪೈಪಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಡುವೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಒಂದಿನ ಭಾಗ-ವಲ್ಲಿ (ಪು. ೧೯-೨೦) ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರದೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಉಪಕರಣ-ಯನ್ನು ಇಂದು ಮಾಡುವಾ.

೫.೫ ಯಾವದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವು

ಬವಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೂಲದಲ್ಲಿ ಬವಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಾವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ, ಇಲ್ಲವೇ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಾಧಾರಣ ಭೇದವು (ಸಮರ್ಪಕವಾದ) ಸಾಧಾರಣವಾದ ಲಘುತಮ (ಲಘುತಮ) ಇರುವ ಹಾಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ೩ ಮತ್ತು ೨ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ೩ ಮತ್ತು ೨ ಎಂದೂ, ೬ ಮತ್ತು ೪ ಎಂದೂ.

೪೩ ಮತ್ತು ೪೦ ಎಂದೂ, ಅನೇಕ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವಾಗ ಇಲ್ಲವೇ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ ಸುಲಭತೆಯ ಮತ್ತು ಅನುಕೂಲತೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅವುಗಳ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಲಘುತಮವಿರುವುದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಈ ಲಘುತಮ ಸಮರ್ಪಕವಾದವೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವುದೆಂಬದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೊದಲು ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭೇದವು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಇರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅ ಎಲ್ಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಹಜವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೇಯ ಬವಲಾಗಬಾರವೆಂದು ಭೇದವು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯಷ್ಟು ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಮೂಲ ಭೇದವನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದರಿಂದಲೇ ಅಂಶವನ್ನಾದರೂ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಲಘುತಮ ಸಮರ್ಪಕ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು, ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ೬೦ ಇದ್ದುದರಿಂದ $\frac{3 \times 10}{4 \times 10}$ ಮತ್ತು $\frac{2 \times 10}{3 \times 10}$

$\frac{೭ \times ೬}{೧೦ \times ೬} \frac{೫ \times ೫}{೧೨ \times ೫}$ ಎಂದು, ಅವಶೇಷೇ $\frac{೪೦}{೬೦}$, $\frac{೧೫}{೬೦}$, $\frac{೨೬}{೬೦}$, $\frac{೪೩}{೬೦}$, $\frac{೨೫}{೬೦}$ ಎಂದು

ಬರೆಯುತ್ತೇನೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಪ ಬ ಮ ಇವುಗಳನ್ನು
ಯ ಲ ವ

ಪಲವ ಬಯವ ಮಯಲ
ಯಲವ ಯಲವ ಯಲವ ಎಂದೂ, ಕ ಗ ಘ ಇವುಗಳನ್ನು
ರಸ ರಸ ರಸ

ಕಕ್ಷ ಗರ ಘಸ ಎಂದೂ, ಇಲ್ಲವೆ (ಯ+ರ)(ರ+ಲ)
ರಸಕ್ಷ ರಸಕ್ಷ ರಸಕ್ಷ

ಕ ಗ ಇವುಗಳನ್ನು
(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ) (ಲ+ಯ)(ಯ+ರ)

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{೭(ಲ+ಯ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ)}$

$\frac{ಕ(ಯ+ರ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ-ಯ)}$ $\frac{ಗ(ರ+ಲ)}{(ಯ+ರ)(ರ+ಲ)(ಲ+ಯ)}$ ಎಂದು

ಬರೆಯುತ್ತೇನೆ.

ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ತಿಳಿದನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಹೊಸ ಅಂಶವನ್ನು ಬರೆಯುವದು ಸುಲಭವಿರುತ್ತದೆ. ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಭೇದವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಸಮಚ್ಛೇದದ ಯಾವ ಅವಶೇಷವಿರುವುದೋ ಅವುಗಳಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಹೊಸ ಸಮಚ್ಛೇದರೂಪ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶವಿರುವದು.

ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಲಘುತಮ ಸಮಚ್ಛೇದ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. $\frac{೫}{೨೦} + \frac{೨}{೩೦} = \frac{೨೫}{೬೦} + \frac{೪}{೬೦} = \frac{೨೯}{೬೦}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು

ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಭೇದಗಳ ಲ.ಸಾ.ವಿ. ಯನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಮತ್ತು ಲ ಸಾ.ವಿ. ಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವದಿದ್ದರೆ ಭೇದಗಳ ಗುಣವ್ಯುತ್ಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಕ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲಾಗಿ,

$$\frac{\text{೫}}{\text{ಯ}^೨ + \text{೬ಯ} + \text{೫}} = \frac{\text{೫}}{(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \frac{\text{೩}}{\text{ಯ}^೨ + ೪ಯ - ೫} = \frac{\text{೩}}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \text{ಮತ್ತು } \frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^೨ - ೧} = \frac{\text{೨}}{(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} - ೧)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. $(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)$.
ಆದುದರಿಂದ,

$$\frac{\text{೫}(\text{ಯ} - ೧)}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \frac{\text{೩}(\text{ಯ} + ೧)}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \text{ಮತ್ತು } \frac{\text{೨}(\text{ಯ} + ೫)}{(\text{ಯ} - ೧)(\text{ಯ} + ೧)(\text{ಯ} + ೫)}; \text{ಇವು ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪಗಳು.}$$

ಉ. ೨. $\frac{\text{೩}}{\text{ಆಯ}^೨ - ೮೨}, \frac{\text{೧}}{\text{ಆಯ}^೨ + ೮೨}, \frac{\text{೨}}{\text{ಆಯ}^೨ - ೯೨}$

$\frac{\text{೪}}{\text{೧೬ಯ}^೪ - ೪೨ಯ^೨ರ^೨ + ೮೪}$ ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ.

$\text{೬೪ಯ}^೬ - ೮೬$ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ $\frac{\text{೩}(\text{ಆಯ}^೨ + ೮೨)}{\text{೬೪ಯ}^೬ - ೮೬}, \frac{\text{೨}(\text{ಆಯ}^೨ - ೮೨)}{\text{೬೪ಯ}^೬ - ೮೬}, \frac{\text{೨}(\text{೧೬ಯ}^೪ + ೪೨ಯ^೨ರ^೨ + ೮೪)}{\text{೬೪ಯ}^೬ - ೮೬}, \frac{\text{೪}(\text{ಆಯ}^೨ - ೮೨)}{\text{೬೪ಯ}^೬ - ೮೬}$

ಇವು ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪಗಳು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಲಘುತಮ ಸಮಷ್ಟೇದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{\text{೨}}{\text{ಆ} - ೯}, \frac{\text{೨}}{\text{ಆ} + ೯}$ ೨. $\frac{\text{೫}}{\text{೨೨} + ೩೯}, \frac{\text{೭}}{\text{೩೨} - ೨೯}$

೩. $\frac{\text{೭}}{\text{೧೬ಆ} - ೪೯}, \frac{\text{೩}}{\text{ಆ} + ೧೨}$ ೪. $\frac{\text{೨ವ}}{\text{೩ಯ} + ೯}, \frac{\text{೩ವ}}{\text{೪ಯ} + ೧೨}$

೫. $\frac{\text{೨}}{\text{ಯ}^೨ - ೬ಯ + ೮}, \frac{\text{೩}}{\text{ಯ}^೨ - ೭ಯ + ೧೨}$

೬. $\frac{ಅ}{ಅರ-ರ-ಇ}, \frac{ಅಇ}{ಅರ+ಇರ+೭}$
೭. $\frac{ಇಇ}{೭ಯ-ಯರ-೧-ರ}, \frac{ಲಲ}{೧೫ಯ+೧೪ಯರ-೮ರ}$
೮. $\frac{೧}{ಅ+೭ಅ+೮}, \frac{೪}{ಅ-ಅ-೨೦}, \frac{೨}{ಅ-೩ಅ-೧೦}$
೯. $\frac{೧}{ಅ-ರ}, \frac{೧}{ಅ-೨ಅಕ+ಕ}, \frac{೧}{ಅ+೨ಅಕ+ಕ}$
೧೦. $\frac{೧}{ಯ-ರ}, \frac{೧}{ಯ+ರ}, \frac{೧}{ಯ-ರ}, \frac{೧}{ಯ+ಯರ+ರ}$
೧೧. $\frac{೧}{(ಯ-ರ)(ರ-೮)}, \frac{೨}{(ರ-೮)(೮-ಯ)}, \frac{೩}{(೮-ಯ)(ಯ-ರ)}$
೧೨. $\frac{೩ಅ}{೪ಯ-೨೫ರ}, \frac{೨ಅ}{೪ಯ-೧-ರ}, \frac{ಅ}{೧೫ಯ-೨೭ಯರ-೨ರ}$

೪.

ಸಂಕಲನ* (ಬೇರೀಜ್) ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ* (ವಜಾಬಾಕಿ).

ಜಿ.೬. ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮಷ್ಟೀದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವ ಮುಖ್ಯ ಶುದ್ಧೀಕರಣವೇನು? ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರಬೇಕೆಂದು ಇರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $\frac{೩}{೪}, \frac{೫}{೧೨}, \frac{೭}{೧೩}, \frac{೧೦}{೧೪}, \frac{೧೩}{೧೫}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವುದಿದ್ದರೆ ಅವು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ನಾವು ಲ. ಸಮಷ್ಟೀದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ತರುವಾಯ ಆ ರೂಪಗಳೊಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೇರೀಜು ಅಂಶವಿದ್ದು ಸಮಷ್ಟೀದವಿರುವ ಫೇದವುಳ್ಳ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು.

ಹೇಗಾದರೆ, $\frac{೩}{೪} + \frac{೫}{೧೨} + \frac{೭}{೧೩} + \frac{೧೦}{೧೪} + \frac{೧೩}{೧೫} = \frac{೪೦}{೪೦} + \frac{೩೩}{೪೦} + \frac{೪೨}{೪೦} + \frac{೨೫}{೪೦} + \frac{೨೭}{೪೦}$

$$\frac{೪೦+೩೩+೪೨+೨೫+೨೭}{೪೦} = \frac{೧೬೭}{೪೦} = \frac{೪೨}{೧೦}$$

ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಿದ್ದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಶ್ಲೇಷದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಹೊಸ ಅಂಶಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅಂತರವು ಅಂಶವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಸಮಶ್ಲೇಷದ ಇದು ಭೇದವುಳ್ಳ ಹೊಸ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\frac{2}{10} - \frac{3}{12} = \frac{42}{120} - \frac{25}{120} = \frac{42-25}{120} = \frac{17}{120}$$

ಯಾವ ಸಂಗತಿಯು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅಂಕಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆದಿರುವದೋ ಅದೇ ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೂ ಇರುವದು. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ, ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಅಂಕಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಡನೆ ಇನ್ನಿತರ ವರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಇವುಗಳ ಉಪಪತ್ತಿಯು ಒಂದೇ. ನಮಗೆ $\frac{3}{a+b}$ ಮತ್ತು

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+m} & \text{ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡುವುದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು } \frac{3}{a+b} + \frac{2}{a+m} \\ &= \frac{3(a+m)}{(a+b)(a+m)} + \frac{2(a+b)}{(a+b)(a+m)} \\ &= \frac{3(a+m) + 2(a+b)}{(a+b)(a+m)} \\ &= \frac{3a+3m+2a+2b}{(a+b)(a+m)} \text{ ಇರುವದು,} \end{aligned}$$

* ಪೂರ್ವಕಾಲದ ಅಚಾರ್ಯರು ತಮ್ಮ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಯೋಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಬೇರೀಜಿಗಾಗಿ, ಮುಕ್ತ ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ವಿಯೋಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮತ್ತು ಅವೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a+m} = \frac{3(a+m)}{(a+b)(a+m)} - \frac{2(a+b)}{(a+b)(a+m)}$$

$$= \frac{೫(ಅ+ಮ)-೩(ಅ+ಪ)}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)}$$

$$= \frac{೨ಅ-೩ಪ+೫ಮ}{(ಅ+ಪ)(ಅ+ಮ)} \text{ ಇರುವದು.}$$

ಹಿಂದಿನ ಅನುವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿಯೆ ಮೊದಲನೇ ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅವಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\frac{೫}{ಯ+೨+೩ಯ+೫} + \frac{೩}{ಯ+೨+೪ಯ-೫} + \frac{೨}{ಯ-೧}$$

$$= \frac{೫}{(ಯ+೧)(ಯ+೫)} + \frac{೩}{(ಯ-೧)(ಯ+೫)} +$$

$$\frac{೨}{(ಯ+೧)(ಯ-೧)}$$

$$= \frac{೫(ಯ-೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)} +$$

$$\frac{೩(ಯ+೧)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)} + \frac{೨(ಯ+೫)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)} *$$

$$= \frac{೫(ಯ-೧)+೩(ಯ+೧)+೨(ಯ+೫)}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)}$$

$$= \frac{೫ಯ-೫+೩ಯ+೩+೨ಯ+೧೦}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)}$$

$$= \frac{೧೦ಯ+೮}{(ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೫)}$$

* ಈ ಚಿಹ್ನೆದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಹಂತವು ಅಷ್ಟು ಅವಶ್ಯಕವಲ್ಲ. ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಸಂತರ ಆದನ್ನು ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

೫. ೭. ಬೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರಳ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ (೧) ಭೇದಗಳು ಗುಣಕಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಕ

ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವದು (೨) ತರುವಾಯ ಎಲ್ಲ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ.ವಿ. ಯನ್ನು ಅಂದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು. (೩) ಅನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಭೇದವನ್ನು ಲ. ಸಮಚ್ಛೇದದೊಳಗಿಂದ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಅವಯವಗಳಿಂದ ಅದರ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸುವದು. (೪) ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವಂತೆ ಆ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನಾಗಲಿ, ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನಾಗಲಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಬೇರೀಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯು ಯಾವುದರ ಅಂಶವು ಮತ್ತು ಸಮಚ್ಛೇದ ಇದುವ ಯಾವುದರ ಭೇದ ವಿರುವದೋ ಅದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಉತ್ತರ.

ಞ.ಲ. ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು, ೨೦೪-೨೦೭) ತುಸು ಮಾಡಲಾಗಿದ್ದು ಅಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧.} \quad & \frac{2}{ಯ+೧೦} + \frac{೨}{ಯ+೨೪} \\
 &= \frac{೨}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)} + \frac{೨}{(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೨(ಯ+೮)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} + \frac{೨(ಯ+೪)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೨(ಯ+೮) + ೨(ಯ+೪)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೪ಯ+೨೪}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೪(ಯ+೬)}{(ಯ+೪)(ಯ+೬)(ಯ+೮)} \\
 &= \frac{೪}{(ಯ+೪)(ಯ+೮)}
 \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲು ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣವೃದ್ಧಕೃಣವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆ ಮೇಲೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಚ್ಛೇದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ತರುವಾಯ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳ ಬೇರಿಜನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಆ ನಂತರ ಬೇರಿಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಯವಗಳು ಮೊರೆಯುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡು ಬಂದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದೆ. ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಈ ಕೂಡಿಸಿದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ (ಸಮಚ್ಛೇದ) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಇಷ್ಟ ಬೇರಿಜನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ದ್ವೈಜಿಕ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರಿಜು ಇಲ್ಲವೆ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದಾಗ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಇಷ್ಟ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

* ಸ್ವಲ್ಪ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಈ ಹಂತವನ್ನು ಸಹಜವಾಗಿ ಬಿಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ ೨.} & \quad \frac{೧೫೨}{೧೨೨+೧೧೨-೧೫} - \frac{೧೦೨}{೮೨+೧೧೨-೧೫} \\
 &= ೫೨ \left\{ \frac{೨}{೧೨೨+೧೧೨-೧೫} - \frac{೨}{೮೨+೧೧೨-೧೫} \right\} \\
 &= ೫೨ \left\{ \frac{೨}{(೨೨+೫)(೨-೨)} - \frac{೨}{(೨೨+೫)(೨-೨)} \right\} \\
 &= ೫೨ \times \frac{೨(೨೨+೫) - ೨(೨೨+೫)}{(೨೨+೫)(೨೨+೫)(೨-೨)} \\
 &= ೫೨ \times \frac{೫}{(೨೨+೫)(೨೨+೫)(೨-೨)} \\
 & \quad \frac{೨೫೨}{(೨೨+೫)(೨೨+೫)(೨+೫)}
 \end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
 & \text{ಉ. ೪.} \quad \frac{\text{ಉಕ} + \text{ಉಕನ} + \text{ಉನ}}{\text{ಉನ}} - \frac{\text{ಉಕ} - \text{ಉಕನ} + \text{ಉನ}}{\text{ಉನ}} \\
 & + \frac{\text{ಉಕ} - \text{ಉಕನ} + \text{ಉನ}}{\text{ಉನ}} \\
 & = \frac{\text{ಉಕ} + \text{ಉಕನ} + \text{ಉನ}}{\text{ಉನ}} - \frac{\text{ಉಕ} - \text{ಉಕನ} + \text{ಉನ}}{\text{ಉನ}} \\
 & + \frac{\text{ಉಕ} - \text{ಉಕನ} + \text{ಉನ}}{\text{ಉನ}} \\
 & = \frac{\text{ಉಕ}(\text{ಉಕ} - \text{ಉನ}) - \text{ಉನ}(\text{ಉಕ} - \text{ಉನ}) + \text{ಉನ}(\text{ಉಕ} - \text{ಉನ})}{(\text{ಉಕ} - \text{ಉನ})(\text{ಉಕ} - \text{ಉನ})(\text{ಉಕ} - \text{ಉನ})}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{ಅಕನ} - \text{ಅಕನ} - \text{ಅಕನ} + \text{ಅಕನ} + \text{ಅಕನ} - \text{ಅಕನ}}{(\text{ಅಕ} - \text{ಅನ})(\text{ಅಕ} - \text{ಅನ})(\text{ಅಕ} - \text{ನ})}$$

$$= \frac{\text{ಅಕನ}}{(\text{ಅಕ} - \text{ಅನ})(\text{ಅಕ} - \text{ಅನ})(\text{ಅಕ} - \text{ನ})}$$

$$\text{ಉ. ೫.} \quad \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅರ}}{\text{ಅಯ} - \text{ಅರ}} - \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ} + \text{ಅರ}}{\text{ಅಯ} - \text{ಅರ}}$$

$$= \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅರ}}{\text{ಅಯ} - \text{ಅರ}} - \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ} + \text{ಅರ}}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅರ})(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} + \text{ಅರ})}$$

$$= \frac{(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} + \text{ಅರ}) - (\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ} + \text{ಅರ})}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅರ})(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} + \text{ಅರ})}$$

$$= \frac{\text{ಅಯ}}{\text{ಅಯ} - \text{ಅರ}}$$

$$\text{ಉ. ೬.} \quad \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}}{\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}} - \frac{\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} + \text{ಅಯ}}{\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}}$$

$$= \frac{(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}{(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})} - \frac{(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ})}{(\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}$$

$$= \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}}{\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ}} - \frac{\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ}}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}$$

$$= \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}) - (\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}$$

$$= \frac{(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ} + \text{ಅಯ}) - (\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})} = \frac{\text{ಅಯ} + \text{ಅಯ}}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}$$

$$= \frac{\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ}}{(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})(\text{ಅಯ} - \text{ಅಯ})}$$

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವ ಪೂರ್ದದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಸಾಧಾರಣ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ, ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೨.} \quad & \frac{ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ}{ಅಪ + ಕ} + \frac{ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ}{ಅಪ - ಕ} - \\
 & \frac{ಅಪ}{ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ} \\
 = & \frac{(ಅ + ಕ)(ಅಪ + ಕ)}{(ಅಪ + ಕ)(ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ)} + \\
 & \frac{(ಅ - ಕ)(ಅಪ - ಕ)}{(ಅಪ - ಕ)(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ)} - \\
 & \frac{ಅಪ}{(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ)(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ)} \\
 = & \frac{ಅ + ಕ}{ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ} + \frac{ಅ - ಕ}{ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ} - \\
 & \frac{ಅಪ}{(ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ)(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ)} \\
 = & \frac{(ಅ + ಕ)(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ) + (ಅ - ಕ)(ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ) - ಅಪ}{(ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ)(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ)} \\
 \text{ಅಂಶ} = & ಅ(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ) + ಅ(ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ) \\
 & + ಕ(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ) - ಕ(ಅಪ - ಅಪಕ + ಕ) - ಅಪ \\
 = & ಅ(ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ) + ಅಪಕ - ಅಪ \\
 = & ಅಪ + ಅಪಕ - ಅಪ(ಅ + ಕ) \\
 \therefore \text{ರಾಶಿಯು} = & \frac{ಅಪ(ಅ + ಕ)}{ಅಪ + ಅಪಕ + ಕ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೪.} \quad & ಅ - ಇ + ಅ - ಅಇ + ಇ \\
 & \frac{(ಅ - ಇ)(ಅ + ಅಇ + ಇ) + ಇ}{ಅ + ಅಇ + ಇ} \\
 & \frac{ಅ - ಇ + ಇ}{ಅ + ಅಇ + ಇ} = \frac{ಅ}{ಅ + ಅಇ + ಇ}
 \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

$$೧. \frac{೪}{೪-ಮ} - \frac{೪}{೪+ಮ}$$

$$೨. \frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ} - \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}$$

$$೩. \frac{ಅಕ}{ಕ-ಗ} - \frac{ಅಗ}{ಕ-ಗ}$$

$$೪. \frac{ಅ}{ಕ} + \frac{ಕ}{ಅ} - ೨$$

$$೫. \frac{ಅ}{ಕ} + \frac{ಕ}{ಅ} + ೧$$

$$೬. \frac{ಅ}{ಪ+ಮ} + \frac{ಅಮ}{ಪ-ಮ}$$

$$೭. \frac{ಕ}{ಪ-೨ಪಮ+ಮ} - \frac{ಕ}{ಪ-ಮ}$$

$$೮. \frac{(ದ+ನ)}{ದ-ನ} - \frac{ದ-ನ}{ದ+ದನ+ನ}$$

$$೯. \frac{೧}{ಯ-೫} - \frac{೫ಯ}{ಯ-೧೫}$$

$$೧೦. \frac{ಪ+ಮ}{ಪ+ಪಮ+ಮ} + \frac{ಪ-ಮ}{ಪ-ಪಮ+ಮ}$$

$$೧೧. \frac{ಅ+೩ಅ-೪೦}{ಅ+೬ಅ+೧೫} + \frac{ಅ+೫ಅ-೧೪}{ಅ+೪ಅ-೨೧}$$

$$೧೨. \frac{ಅ+೨}{ಅ+೮ಅ+೧೫} + \frac{ಅ+೧}{ಅ+೭ಅ+೧೨}$$

$$೧೩. \frac{೩ಯ+೪}{೨೭ಯ+೬೪} + \frac{೩ಯ-೪}{೨೭ಯ-೬೪}$$

$$೧೪. \frac{ರ-ರಾಲ+ರಲಾ}{ರ+ಲಾ} + \frac{ಲ+ರಲಾ+ರಾಲ}{ರ-ಲಾ}$$

$$೧೫. \frac{೧}{೨ಪ+೫ಮ} - \frac{೨ಪ-೫ಮ}{೪ಪ+೨೦ಪಮ+೨೫ಮ}$$

$$೧೬. \frac{ನೌ+೨ನ+೧}{ಪೌ+೪ನೌ+ನ-೬} - \frac{ನೌ-೨ನ+೧}{ನೌ+೬ನೌ+೧ನ+೬}$$

$$೧೭. \frac{೧}{ಪೌ-ಮೌ} - \frac{ಪ-ಮ}{ಪೌ+ಪೌಮೌ+ಮೌ}$$

$$೧೮. \frac{ಅ}{ಅ+೧೦ಅ+೨೫} - \frac{ಆ}{ಅ+೧೦.ಅ+೭೫೨+೧೫೫}$$

$$೧೯. \frac{೧}{ಪ-೨ಮ+೩} - \frac{ಪೌ+೪ಮೌ+೯}{ಪೌ-೪ಮೌ+೧೦ಪಮ+೨೭}$$

$$೨೦. \frac{ಪ}{ಪ-೪} + \frac{ಪ}{ಪ+೪} - \frac{ಪೌ}{ಪೌ-೧೬}$$

$$೨೧. \frac{೧}{ನ+೩} - \frac{ನ-೩}{ನೌ+೬ನ+೯} - \frac{೬(ನ-೩)}{(ನ+೩)^೨}$$

$$೨೨. \frac{ಪ}{ಪೌ-ಮೌ} + \frac{ಮ}{ಪೌ+ಮೌ} - \frac{ಪೌ+ಮೌ}{ಪೌ+೨ಮೌ+ಮೌ}$$

$$೨೩. \frac{೩}{೫೨+೨} - \frac{೧}{೨೨-೫} + \frac{೪೨+೧೧}{೧೦೨೨-೨೯೨+೧೦}$$

$$೨೪. \frac{೧}{ಯ+೩} - \frac{ಯ+೩}{ಯೌ-೩ಯ+೯} + \frac{೧೦ಯ+೩}{ಯೌ+೨೭}$$

$$೨೫. \frac{೧}{೪ಪೌ-೨೦ಪಮ+೭೫ಮೌ} + \frac{೧}{೪ಪೌ+೨೦ಪಮ+೨೫ಮೌ} - \frac{೪ಪೌ+೭೫ಮೌ}{೧೬ಪೌ-೨೦೦ಪೌಮೌ+೬೫೫ಮೌ}$$

$$೨೬. \frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)} + \frac{೧}{(ಬ-ಮ)(ಪ-ಮ)} + \frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)}$$

$$೨೭. \frac{ಪ-ಬ}{(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ)} + \frac{ಬ-ಮ}{(ಮ+ಪ)(ಪ+ಬ)}$$

$$+ \frac{ಮ-ಪ}{(ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)}$$

$$ಉ. \quad \frac{ಘ}{(ಗ-ಘ)(ಘ-ಕ)} + \frac{ಕ}{(ಘ-ಕ)(ಕ-ಗ)} + \frac{ಗ}{(ಕ-ಗ)(ಗ-ಘ)}$$

ಯಥಾಕ್ರಮ ಏಕೀಕರಣ.

ಉ. ೯. ಅನೇಕ ಸಲ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡದೆ, ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮೊದಲು ಎರಡೇ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಕೂಡಿಸಿ ತರುವಾಯ ಅದರಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವದು, ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಣಾಮಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಪದವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವದು, ಹೀಗೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ಹೋಗುವದು ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಲ. ಸನುಚ್ಛೇದವು ದೊಡ್ಡದು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಳೆದ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಆಗುವ ಸಂಭವವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ತರಹದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\text{ಉ. ೧.} \quad \frac{೧}{ಅ-೨} - \frac{೧}{ಅ+೨} - \frac{೪}{ಅ+೪}$$

$$= \frac{(ಅ+೨) - (ಅ-೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)} - \frac{೪}{ಅ+೪} = \frac{೪}{ಅ-೪} - \frac{೪}{ಅ+೪}$$

$$= \frac{೪(ಅ+೪) - ೪(ಅ-೪)}{(ಅ-೪)(ಅ+೪)} = \frac{೩೨}{ಅ-೧೬}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಲ. ಸನುಚ್ಛೇದವು $(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ+೪)$ ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಂಡಿಸಬಹುದು.

$$\text{ಗಾತಿಯು} = \frac{(ಅ+೨)(ಅ+೪) - (ಅ-೨)(ಅ-೪) - ೪(ಅ-೨)(ಅ+೨)}{(ಅ-೨)(ಅ+೨)(ಅ-೪)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + d^2) - 2(a^2 - b^2)}{(a - b)(a + b)(c^2 + d^2)} \\
 &= \frac{(a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + d^2 - a^2 - 2ab - b^2 + c^2 + d^2 - 2a^2 + 2b^2)}{(a - b)(c^2 + d^2)} \\
 &= \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \quad \text{ಹೀಗೆ ಆಗುತ್ತದೆ.} \quad \text{ತುಲನೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ}
 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೇ ಮಾರ್ಗವು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ಸಂಗತಿಯು ಕಂಡು ಬರುವುದು.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೨.} \quad & \frac{a - b}{a - c} - \frac{a + b}{a + c} - \frac{ac}{a^2 + 2ab + b^2} \\
 &= \frac{(a - b)(a + c) - (a + b)(a - c)}{(a - c)(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)(a + c)} \\
 &= \frac{(a^2 + bc - ac) - (a^2 - bc - ab - cb)}{(a - c)(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)(a + c)} \\
 &= \frac{ac}{(a - c)(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)(a + c)} \\
 &= \frac{ac(a + b) - ac(a - c)}{(a - c)(a + c)(a + b)} \\
 &= \frac{ac^2}{(a - c)(a + b)(a + c)}
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತರಹದ ಸಾಮ್ಯವಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಏಕೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಹಾಗೆ ಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಮೂರನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಳೆದಿದೆ.

ಹಲವು ಸಾರಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೇ ಪದದವರೆಗೆ ಹೋಗುವುದು ಅನುಕೂಲವಿರುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
\text{ಉ. ೩. } & \frac{n}{y+n} + \frac{a}{y^2+n} + \frac{b}{y^3+n} + \frac{c}{y^4-n} \\
&= \frac{n}{y+n} + \frac{a}{y^2+n} + \frac{b(y^3-n)+c}{(y^3+n)(y^3-n)} \\
&= \frac{n}{y+n} + \frac{a}{y^2+n} + \frac{b(y^3+n)}{(y^3+n)(y^3-n)} \\
&= \frac{n}{y+n} + \frac{a}{y^2+n} + \frac{b}{y^3-n} \\
&= \frac{n}{y+n} + \frac{a(y^3-n)+b}{(y^2+n)(y^3-n)} \\
&= \frac{n}{y+n} + \frac{a(y^3+n)}{(y^3-n)(y^2+n)} \\
&= \frac{n}{y+n} + \frac{a}{y^3-n} \\
&= \frac{y-n+a}{(y+n)(y-n)} \\
&= \frac{y+n}{(y+n)(y-n)} \\
&= \frac{n}{y-n}
\end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೫

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$೧. \frac{n}{p-q} + \frac{n}{p+q} + \frac{a}{p^2+q^2}$$

$$೨. \frac{a}{p-q} - \frac{a}{p+q} - \frac{a^2}{p^2+q^2}$$

$$೩. \frac{n}{a-m-n} - \frac{n}{a+m-n} - \frac{a}{a+m^2+n}$$

$$೪. \frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ} + \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ} = \frac{೨(ಅ^2-ಕ^2)}{ಅ^2-ಕ^2}$$

$$೫. ೧ - \frac{೧}{ಪ-೩} + \frac{೬}{ಪ-೯}$$

$$೬. \frac{೧}{ನ} - \frac{ನ}{ನ-೧} + \frac{ನ^2-೨}{ನ^2-೩ನ+೨}$$

$$೭. \frac{೨ಮ}{ಮ^2-೪ಮ+೪} - \frac{೧}{ಮ-೨} - \frac{೩ಮ}{೪ಮ^2-೧೦ಮ+೪}$$

$$೮. \frac{೧}{ಪ+ಮ} - \frac{ಪ+ಮ}{ಪ^2-ಪಮ+ಮ^2} + \frac{೩ಪಮ}{ಪ^೩-ಮ^೩}$$

$$೯. \frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ} - \frac{ನ^2-ನಮ+ಮ^2}{ನ^2+ನಮ+ಮ^2} - \frac{೨ನ(೨ನ^2+ಮ^2)}{ನ^೩+ಮ^೩}$$

$$೧೦. \frac{೨}{ಯ+೫} + \frac{೧೦-೩ಯ}{ಯ^2-೨೫} + \frac{೫}{ಯ+೧}$$

$$೧೧. \frac{೧}{ಅ+೧} - \frac{೧}{ಅ+೨} - \frac{೨}{ಅ^2+೪ಅ+೪}$$

$$೧೨. \frac{೧}{೨ಪ+೧} - \frac{೧}{೨ಪ+೩} - \frac{೨}{೪ಪ^2+೧೨ಪ+೫}$$

$$೧೩. \frac{ಕ್ಷ+೧}{ಕ್ಷ^2+ಕ್ಷ+೧} - \frac{ಕ್ಷ-೧}{ಕ್ಷ^2-ಕ್ಷ+೧} + \frac{೨(ಕ್ಷ^2+೧)}{ಕ್ಷ^4-೧}$$

$$೧೪. \frac{೧}{೨ಯ-೧} - \frac{೧}{೨ಯ+೧} + \frac{೨}{೪ಯ^2+೧} + \frac{೪}{೧೬ಯ^2+೧}$$

$$೧೫. \frac{೧}{ಅ+೧} - \frac{೧}{ಅ+೩} - \frac{೨}{ಅ^2+೬ಅ+೫} -$$

$$\frac{೪}{ಅ^೩+೧೧ಅ^2+೩೧ಅ+೨೧}$$

೩.

ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದು

೫.೧೦. ಕೆಲವು ಸಾರೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ
ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಲು ಪ್ರತಿ
ಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಮಾಡಿ ಅದೇ ಆ ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮ-
ಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸುವದು ಇಷ್ಟವಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ
ಉಪಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ. ೧.} \quad & \frac{೩}{ಅ-೫} + \frac{೫}{ಅ+೩} - \frac{೩ಅ}{ಅ-೫} - \frac{೫ಅ}{ಅ-೯} \\
 &= \left(\frac{೩}{ಅ-೫} - \frac{೩ಅ}{ಅ-೫} \right) + \left(\frac{೫}{ಅ+೩} - \frac{೫ಅ}{ಅ-೯} \right) \\
 &= \frac{೩(ಅ+೫)-೩ಅ}{ಅ-೫} + \frac{೫(ಅ-೩)-೫ಅ}{ಅ-೯} \\
 &= \frac{೧೫}{ಅ-೫} - \frac{೧೫}{ಅ-೯} \\
 &= \frac{೧೫ಅ-೧೫೫-೧೫ಅ+೩೩೫}{(ಅ-೫)(ಅ-೯)} \\
 &= \frac{೨೮೦}{ಅ-೩೩ಅ+೨೫}
 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳಲ್ಲಿ
ಅ-೫ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳಲ್ಲಿ
ಅ+೩ ಇವು ಸಾಧಾರಣ ಅವಯವಗಳಿದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಹಾಗೆ
ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಂಕ್ಷೇಪ-
ವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ, ಆ ನಂತರ ಈ ಸಂಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದೆ. ನಾಲ್ಕೂ
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದಗಳ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಸಮರ್ಪಿಸುವದು ತೆಗೆದು-
ಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಮಾಡುವದಕ್ಕೆ ಯತ್ನಿಸುವ-
ದಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದದ್ದು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೬.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು
ಗೂಡಿಸಿರಿ.

$$೧. \frac{೧}{ಯ-೩} + \frac{೧}{ಯ+೪ಯ+೩} - \frac{೬}{ಯ-೯}$$

$$೨. \frac{೪}{೧+೮} - \frac{೧}{೪+೮} + \frac{೪}{೧-೮} - \frac{೧}{೪-೮}$$

$$೩. \frac{೧}{೭-೨} - \frac{೧}{೭-೧} + \frac{೧}{೭-೧} - \frac{೨}{೭-೪}$$

$$೪. \frac{೫ನ}{೭ನ-೩ನ} + \frac{೬ನ}{೭ನ-೨ನ} - \frac{೫}{೭ನ+೬} - \frac{೬}{೭ನ-೫}$$

$$೫. \frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ} - \frac{೪ಅಕ}{ಅ+ಕ೨} - \frac{ಅ-ಕ}{ಅ+ಕ}$$

$$೬. \frac{೨}{ಕ್ಯ+೧} + \frac{೧}{ಕ್ಯ-೨} - \frac{೨}{ಕ್ಯ-೧} - \frac{೧}{ಕ್ಯ+೨}$$

$$೭. \frac{೧}{ಕ್ಯ-೩ಕ್ಯ+೨} - \frac{೨}{ಕ್ಯ-೪} + \frac{೧}{ಕ್ಯ+ಕ್ಯ-೨}$$

$$೮. \frac{೧}{೭ನ-ಮ} + \frac{೧}{೭ನ+ಮ} + \frac{೧}{೭ನ-ಮ} + \frac{೧}{೭ನ+ಮ}$$

$$೯. \frac{ಗ}{ಅ-ಕ} - \frac{ಕ}{ಅ-ಗ} - \frac{ಗ}{ಅ+ಕ} + \frac{ಕ}{ಅ+ಗ}$$

$$೧೦. \frac{೨}{ಯ-೨} + \frac{೩}{ಯ+೩} - \frac{೨}{ಯ+೪} - \frac{೩}{ಯ-೧}$$

$$೧೧. \frac{೨}{ಕ್ಯ-೨} + \frac{೪}{ಕ್ಯ+೩} - \frac{ಕ್ಯ+೧೦}{ಕ್ಯ-೨ಕ್ಯ-೮} - \frac{೮}{ಕ್ಯ+೮ಕ್ಯ+೧೫}$$

$$೧೨. \frac{೨೮}{ಅ-೫ಕ೨} - \frac{೫ಕ}{ಅ+೫ಅಕ+೫ಕ೨} - \frac{೧}{೧+೫ಕ}$$

$$+ \frac{ಅ(ಅ+೧೦ಕ)}{ಅಕ-೧೦೫ಕ^೨}$$

೭.

ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದು.

೫.೧೧. ಅನೇಕ ಸಾರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಭೇದಗಳೊಳಗಿನ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಸ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಅನುಕೂಲ-ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಅವಶ್ಯವು ಸಹ ಇರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$\frac{೧೧}{ಅ-ಕ} + \frac{೭}{ಕ-ಅ}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು

$$\begin{aligned} \frac{೧೧}{ಅ-ಕ} + \frac{೭}{ಕ-ಅ} &= \frac{೧೧}{ಅ-ಕ} + \frac{೭}{-(ಕ-ಅ)} = \frac{೧೧}{ಅ-ಕ} - \frac{೭}{ಕ-ಅ} \\ &= \frac{೪}{ಅ-ಕ} ಎಂದು ಕೊಡಲು ಬರುವುದು. \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಕ-ಅ ಅಂದರೆಯೇ $-(ಅ-ಕ)$, ಆದುದರಿಂದ $\frac{೭}{ಕ-ಅ}$ ಅಂದರೆಯೇ $-\frac{೭}{ಅ-ಕ}$ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಕೂಡಲೇ ನಮ್ಮ ಎಷ್ಟದಲ್ಲಿ

$$\begin{aligned} &\text{ಬರಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಬರದಿದ್ದರೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು} \frac{೧೧}{ಅ-ಕ} + \frac{೭}{ಕ-ಅ} \\ &= \frac{೧೧(ಕ-ಅ) + ೭(ಅ-ಕ)}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)} = \frac{೧೧ಕ-೧೧ಅ+೭ಅ-೭ಕ}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)} \\ &= \frac{೪ಕ-೪ಅ}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)} = \frac{೪(ಕ-ಅ)}{(ಅ-ಕ)(ಕ-ಅ)} = \frac{೪}{ಅ-ಕ} \end{aligned}$$

ಎಂದು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಈ ಎಲ್ಲ ಶ್ರಮವು ದ್ರಾವಿಡ ಪ್ರಾಣಾಯಾಮ-ದಂತೆ ನಗೆಗೀಡಾದದ್ದಲ್ಲವೇ? ಇಲ್ಲಿ ಲ. ಸಮಷ್ಟೀದ (ಅ-ಕ) (ಕ-ಅ)

ಇದರದೇ ಅದು ಅ-ಕ ಇದೆ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯು ನಮ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೂಡಲೇ ಬರಬೇಕು.

ಅದರಂತೆಯೇ $\frac{ಅಕ}{ಪ-ಅಬ} - \frac{ಅಕ}{ಅಬ-ಅಪ}$ ಈ ರೀತಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು

$$\begin{aligned} \frac{ಅಕ}{ಪ-ಅಬ} - \frac{ಅಕ}{ಅಬ-ಅಪ} &= \frac{ಅಕ}{ಪ-ಅಬ} - \frac{ಅಕ}{-(ಅಬ+ಅಪ)} \\ &= \frac{ಅಕ}{ಪ-ಅಬ} + \frac{ಅಕ}{ಅ(ಪ+ಅಬ)} = \frac{ಅಕ+ಅಕ}{ಅ(ಪ-ಅಬ)} = \frac{ಅಕ}{ಅ(ಪ-ಅಬ)} \end{aligned}$$

ಎಂದು ಕೊಡಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಅಬ-ಅಪ, ಅಂ. -ಅಪ+ಅಬ, ಅಂದರೆಯೇ -ಅ(ಪ-ಅಬ) ಈ ಸಂಗತಿಯು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಕಾರಣವಿಲ್ಲದೆ ಕೃತಿಯು ಬೆಳೆಯುವದು.

೫೧೨. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಹಿಂದೆ ನಮಗೆ ಆಗಾಗ್ಗೆ ತಿಳಿದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡುವದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ.

$$ಬ-ಪ = -(ಪ-ಬ); (-ಪ)(-ಬ) = (ಪ)(ಬ);$$

$$(-ಪ)(ಬ) = (ಪ)(-ಬ); -\frac{ಪ}{ಬ} = \frac{ಪ}{ಬ}; -\frac{ಪ}{-ಬ} = \frac{ಪ}{ಬ};$$

$$\frac{-ಪ}{ಬ} = \frac{ಪ}{-ಬ}; \frac{ಪ}{ಬ} = -\frac{ಪ}{-ಬ}; \frac{ಪ}{-ಬ} = -\frac{ಪ}{ಬ};$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಈ ಎರಡರೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ, ಇಲ್ಲವೆ ಅಂಶ ಅಥವಾ ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಹಿಂದಿನ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ, ಮತ್ತು ಕುಸಿನ ಹೊರಗಿನ ಚಿಹ್ನೆ ವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಪನೋಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಆ ಕಂಪದಲ್ಲಿರುವ ಗುಂಪಿನ ಬಾಹ್ಯ ರೂಪವು ಬದಲಾದರೂ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಅದೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆಯೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ

ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತರಹದಾದರೂ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ.

ಮುಂದೆ ಬೆಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಚೀಕರಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿರಿ:

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ.೧.} \quad & \frac{\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}} + \frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}} + \frac{\text{೨ಪಮ}}{\text{ಮ}^2-\text{ಪ}^2} \\
 &= \frac{\text{ಪ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}} + \frac{\text{ಮ}}{\text{ಪ}-\text{ಮ}} - \frac{\text{೨ಪಮ}}{\text{ಪ}^2-\text{ಮ}^2} \\
 &= \frac{\text{ಪ}(\text{ಪ}-\text{ಮ}) + \text{ಮ}(\text{ಪ}+\text{ಮ}) - \text{೨ಪಮ}}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})} \\
 &= \frac{\text{ಪ}^2 - \text{ಪಮ} + \text{ಪಮ} + \text{ಮ}^2 - \text{೨ಪಮ}}{(\text{ಪ}+\text{ಮ})(\text{ಪ}-\text{ಮ})} \\
 &= \frac{\text{ಪ}^2 - \text{೨ಪಮ} + \text{ಮ}^2}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}+\text{ಮ})} \\
 &= \frac{(\text{ಪ}-\text{ಮ})^2}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಪ}+\text{ಮ})} \\
 &= \frac{\text{ಪ}-\text{ಮ}}{\text{ಪ}+\text{ಮ}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ಉ.೨.} \quad & \frac{\text{ಯ}^2-\text{ಯರ}+\text{ರ}^2}{\text{ಯ}^2-\text{ರ}^2} + \frac{\text{೨ಯ}}{\text{ರ}^2-\text{ಯ}^2} - \frac{\text{೧}}{\text{ರ}-\text{ಯ}} \\
 &= \frac{\text{ಯ}^2-\text{ಯರ}+\text{ರ}^2}{\text{ಯ}^2-\text{ರ}^2} + \frac{\text{೨ಯ}-(\text{ರ}+\text{ಯ})}{\text{ರ}^2-\text{ಯ}^2} \\
 &= \frac{\text{ಯ}^2-\text{ಯರ}+\text{ರ}^2}{\text{ಯ}^2-\text{ರ}^2} + \frac{\text{ಯ}-\text{ರ}}{\text{ರ}^2-\text{ಯ}^2} \\
 &= \frac{\text{ಯ}^2-\text{ಯರ}+\text{ರ}^2}{\text{ಯ}^2-\text{ರ}^2} - \frac{\text{ಯ}-\text{ರ}}{\text{ಯ}^2-\text{ರ}^2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{ಯಃ - ಯಃ + ರಃ}{ಯಃ - ರಃ} - \frac{೧}{ಯ + ರ}$$

$$\frac{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ಯಃ + ರಃ) - (ಯಃ + ರಃ)}{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}$$

$$\frac{ಯಃ + ರಃ - (ಯಃ - ರಃ)}{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}$$

$$= \frac{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}{(ಯ + ರ)(ಯಃ - ರಃ)}$$

ಅ. ೩. $\frac{ಕ}{ಅಕಃ - ಕನಃ - ಜನಃ} - \frac{ಓಕಃ}{ಅಕಃ + ಂಕನಃ + ಳನಃ} - \frac{ನ}{ಅಂನಃ + ಂನಕಃ - ಓಕಃ}$

$$= \frac{ಕ}{ಅಕಃ - ಕನಃ - ಜನಃ} - \frac{ಓಕಃ}{ಅಕಃ + ಂಕನಃ - ಳನಃ} + \frac{ನ}{ಅಕಃ - ಂಕನಃ - ಅಂಪಃ}$$

$$= \frac{ಕ}{(ಕ - ಜನಃ)(ಅಕಃ + ನಃ)} - \frac{ಓಕಃ}{(ಅಕಃ + ನಃ)(ಓಕಃ + ಳನಃ)} + \frac{ನ}{(ಓಕಃ + ಳನಃ)(ಕ - ಜನಃ)}$$

$$= \frac{ಕ(ಓಕಃ + ಳನಃ) - ಓಕಃ(ಕ - ಜನಃ) + ನಃ(ಅಕಃ + ನಃ)}{(ಕ - ಜನಃ)(ಅಕಃ + ನಃ)(ಓಕಃ + ಳನಃ)}$$

$$= \frac{ಅಕಃ + ಳನಃ - ಓಕಃ + ಂಕನಃ + ಅಕನಃ + ನಃ}{(ಕ - ಜನಃ)(ಅಕಃ + ನಃ)(ಓಕಃ + ಳನಃ)}$$

$$= \frac{ಅಂಕನಃ + ನಃ}{(ಕ - ಜನಃ)(ಅಕಃ + ನಃ)(ಓಕಃ + ಳನಃ)}$$

$$= \frac{ನಃ(ಅಂಕಃ + ನಃ)}{(ಕ - ಜನಃ)(ಅಕಃ + ನಃ)(ಓಕಃ + ಳನಃ)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವನ್ನು ಮೊದಲೇ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಭೇದಗಳ ಗುಣವೃದ್ಧಕೃರಣವನ್ನು ಮಾಡಿ,

$$\frac{\text{ಕ}}{(\text{ಕ}-\text{ಇನ})(\text{ಅಕ}+\text{ನ})} - \frac{\text{ಓಕ}}{(\text{ಅಕ}+\text{ನ})(\text{ಓಕ}+\text{ಇನ})} - \frac{\text{ನ}}{(\text{ಇನ}+\text{ಓಕ})(\text{ಇನ}-\text{ಕ})}$$

ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರೆ ತರುವಾಯ ಇನ - ಕ ಅಂದರೆಯೇ - (ಕ-ಇನ) ಮತ್ತು ಇನ+ಓಕ ಅಂದರೆಯೇ ವಿರುದ್ಧ ಪದಕ್ರಮದಿಂದ ಓಕ+ಇನ, ಮತ್ತು ಅದುದರಿಂದ

$$- \frac{\text{ನ}}{(\text{ಇನ}+\text{ಓಕ})(\text{ಇನ}-\text{ಕ})} = + \frac{\text{ನ}}{(\text{ಓಕ}+\text{ಇನ})(\text{ಕ}-\text{ಇನ})}$$

ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಅದರಂತೆ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಂದಿನ ಹಂತವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

$$\text{ಉ. ೪.} \quad \frac{\text{ಪಬ}}{(\text{ಪ}-\text{ಮ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})} + \frac{\text{ಬಮ}}{(\text{ಬ}-\text{ಪ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})} +$$

$\frac{\text{ಮಪ}}{(\text{ಮ}-\text{ಬ})(\text{ಪ}-\text{ಬ})}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈಲಿ ನೋಡಿದರೆ ಮೂರೂ ಭೇದಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿ ಆರು ಗುಣಗಳಿದ್ದಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ ಕಂಡು-ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಜೇರೆ ಜೇರೆ ಗುಣಗಳು ಮಾತ್ರವಿದ್ದು ಅನೇ ತಿರುಗಿ ಜನ್ಮಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಬಂದಿವೆ. ಪ-ಮ = - (ಮ-ಪ), ಬ-ಪ = - (ಪ-ಬ) ಮತ್ತು ಮ-ಬ = - (ಬ-ಮ) ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ,

ರಾಶಿಯು =

$$\begin{aligned} & \frac{\text{ಪಬ}}{(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})} - \frac{\text{ಬಮ}}{(\text{ಮ}-\text{ಪ})(\text{ಪ}-\text{ಬ})} - \frac{\text{ಮಪ}}{(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})} \\ & = - \frac{\text{ಪಬ}(\text{ಪ}-\text{ಬ}) + \text{ಬಮ}(\text{ಬ}-\text{ಮ}) + \text{ಮಪ}(\text{ಮ}-\text{ಪ})}{(\text{ಪ}-\text{ಬ})(\text{ಬ}-\text{ಮ})(\text{ಮ}-\text{ಪ})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶ=ಪೌಬ—ಪಬಿ + ಬಮ(ಬ—ಮ) + ಪಮೌ—ಪೌಮ \\
 & = ಪೌಬ—ಪೌಮ—ಪಬಿ + ಪಮೌ + ಬಮ(ಬ—ಮ) \\
 & = ಪೌ(ಬ—ಮ)—ಪ(ಬಿ—ಮೌ) + ಬಮ(ಬ—ಮ) \\
 & = (ಬ—ಮ){ಪೌ—ಪ(ಬ+ಮ)+ಬಮ} \\
 & = (ಬ—ಮ){(ಪೌ—ಪಬ)—(ಪಮ—ಬಮ)} \\
 & = (ಬ—ಮ){ಪ(ಪ—ಬ)—ಮ(ಪ—ಬ)} \\
 & = (ಬ—ಮ)(ಪ—ಬ)(ಪ—ಮ) \\
 & = --(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ಫಲಿತಂ} = \frac{--(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)}{(ಪ—ಬ)(ಬ—ಮ)(ಮ—ಪ)} = ೧$$

ಇಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡತಕ್ಕ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಫೇದಗಳು ಮೇಲಿನಂತೆ ವರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಎರಡೆರಡರ ಅಂತರದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರುವವೋ ಅಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಂತೆ ಚಿನ್ನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ವಿನಿಮಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಮರ್ಥವಾದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಇಂಥ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಣಾನುಕ್ರಮದಂತೆ ವರ್ಣಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೊನೆಯ ವರ್ಣದ ನಂತರ ತಿರುಗಿ ಮೊದಲನೆಯವನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ರಾಜಮಾರ್ಗವು. ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋದರೆ ಯಾವ ತರದ ತಪ್ಪಾಗುವ ಸಂಭವವಿಲ್ಲ. ಬರೆಯುವ ಈ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ (ಪ—ಬ, ಬ—ಮ, ಮ—ಪ) ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದೆ. ಫೇದಗಳಲ್ಲಿಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಕ್ರಮದಿಂದ ತಿರುಗಿ ಬರೆದ ಮೂಲಕ ಯಾವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ನೋಡಲು ಅದು ಗುಣಗಳು ಕಾಣುತ್ತಿದ್ದವೋ ಅಲ್ಲಿ ನೋಡಾಗಿ ಮೂರೇ ಗುಣಗಳಿದ್ದದ್ದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡೇ ಬಂದಿರುವದು.

ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಳ್ಳೇ ರೂಢಿಯಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಫೇದಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯಕ್ರಮದಿಂದಲೇ ಬರೆಯುವುದು ಅವಶ್ಯವಿರುವದಲ್ಲ, ಅದರ ಸಮ್ಮತರಬೇತಿಯು ಅಷ್ಟು ಅಗುವವರೆಗೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದು ಇಷ್ಟವಾದುದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೭.

ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿ.

$$೧. \frac{೭}{ಪ-ಮ} + \frac{೬}{ಮ-ಪ} \quad ೩. \frac{೧}{೫ಯ-೩} - \frac{೧}{೩-೫ಯ}$$

$$೨. \frac{ರ+೫}{ರ-೩} - \frac{೫-ರ}{೩-ರ} \quad ೪. \frac{೪ಪ}{ಪ-ಮ} - \frac{೪ಮ}{ಮ-ಪ}$$

$$೫. \frac{೪}{ಕ್ಷ-೫ಕ್ಷ+೪} - \frac{೧}{೧-ಕ್ಷ} - \frac{೧}{ಕ್ಷ-೪}$$

$$೬. \frac{೩}{ಪ+ಮ} + \frac{೩}{ಮ+ಪ} - \frac{೮ಮ}{ಮ-ಪ}$$

$$೭. \frac{೧}{೨ಕ+೨ಕ-೪} - \frac{೧}{೮-೧೦ಕ-೩ಕ}$$

$$೮. \frac{೪}{ನ-೨} + \frac{೨}{೪-ನ} + \frac{೮-೩ನ}{೮-೩ನ+೪}$$

$$೯. \frac{೨+೪ಯ}{೧-೪ಯ} - \frac{೨-೪ಯ}{೧+೪ಯ} + \frac{೧೨ಯ}{೧೨ಯ-೧}$$

$$೧೦. \frac{೨}{೨-ಕ್ಷ} - \frac{೧}{ಕ್ಷ+೪} + \frac{೨}{ಕ್ಷ+೨} - \frac{೧}{೪-ಕ್ಷ}$$

$$೧೧. \frac{೬}{(ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)} - \frac{೮}{(ಮ-ಬ)(ಮ-ಪ)}$$

$$೧೨. \frac{೧}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)} + \frac{೧}{(ಬ-ಮ)(ಬ-ಪ)} + \frac{೧}{(ಮ-ಪ)(ಮ-ಬ)}$$

$$೧೩. \frac{೮ಬ}{(ಮ-ಪ)(ಮ-ಬ)} + \frac{೮ಮ}{(ಪ-ಬ)(ಪ-ಮ)} + \frac{೮ಪ}{(ಬ-ಮ)(ಬ-ಪ)}$$

$$೧೪. \frac{೪}{(ಯ-ರ)(ಯ-೮)} + \frac{೪}{(ರ-೮)(ರ-ಯ)} + \frac{೪}{(೮-ಯ)(೮-ರ)}$$

$$೧೫. \frac{೪+ರ}{(ಯ-೮)(ರ-೮)} + \frac{ರ-೮}{(ರ-ಯ)(೮-ಯ)} - \frac{೪+೮}{(ಯ-ರ)(ರ-೮)}$$

$$\frac{(p+b)^2 - pb}{(b-p)(m-p)} - \frac{(b+m)^2 - bm}{(m-b)(p-m)} + \frac{(p+m)^2 - pm}{(p-b)(b-m)}$$

$$2. \quad \frac{a+b}{(b-a)(b-a)} - \frac{a+b}{(b-a)(b-a)} + \frac{a+b}{(b-a)(b-a)}$$

6.

ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಜಿ.ಎಂ. ಯಾವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಘೇವದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆ ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥವುಗಳಿಗೆ ಪ್ರಭಾಗ-
ಚಾತಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಮಿಶ್ರ Complex) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದು ತ್ತಾರೆ.

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = 1$$

ಇವು ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವವು. ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೋ ಕವರಂಶೀಯ ಕವುಗಳನ್ನು ವಿವರಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಬಿಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯು ಒಂದೇ. ಕೆಳಗಿನ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸುಲಭ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \pi_3 \\ \pi_2 \\ \pi_1 \\ \pi_0 \end{array} = \begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{r} \pi_3 \\ \pi_2 \\ \pi_1 \\ \pi_0 \end{array} = \begin{array}{r} 23 \\ 12 \\ 03 \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{५.३.} \\ & \text{३३} \times \text{३३} = \text{१०८९} \\ & \text{३३} \times \text{३३} = \text{१०८९} \\ & \text{३३} \times \text{३३} = \text{१०८९} \end{aligned}$$

$$\text{ಉ.೪.} \quad \frac{\frac{ಪ+ಬ}{ಮ}}{ನ} = \frac{ಪ+ಬ}{ಮ} \div \frac{ನ}{೧} = \frac{ಪ+ಬ}{ಮ} \times \frac{೧}{ನ} = \frac{ಪ+ಬ}{ನಮ}$$

$$\text{ಉ.೫.} \quad \frac{\frac{ಯ}{ಮ-ರ}}{ಲ} = \frac{ಯ}{೧} \div \frac{ಯ-ರ}{ಲ} = \frac{ಯ}{೧} \times \frac{ಲ}{ಯ-ರ} = \frac{ಯಲ}{ಯ-ರ}$$

$$\text{ಉ.೬.} \quad \frac{\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ}}{\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+೨ಮಯ+ಯ}} = \frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ} \div \frac{ಮ-ಯ}{ಮ+೨ಮಯ+ಯ}$$

$$\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+೨ಮಯ+ಯ} = \frac{ಮ-ಯ}{ಮ+ಮಯ+ಯ} \times$$

$$\frac{ಮ-ಯ}{ಮ+೨ಮಯ+ಯ} = \frac{(ಮ-ಯ)(ಮ+ಯ)}{ಮ+ಮಯ+ಯ}$$

$$\times \frac{(ಮ-ಯ)(ಮ+ಮಯ+ಯ)}{(ಮ+ಯ)} = \frac{(ಮ-ಯ)^2}{ಮ+ಯ}$$

$$\text{ಉ.೭.} \quad \frac{\frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ} - \frac{ನ-ಮ}{ನ+ಮ}}{\frac{ನ+ಮ}{ನ-ಮ} + \frac{ನ-ಮ}{ನ+ಮ}} = \frac{\frac{(ನ+ಮ)^2 - (ನ-ಮ)^2}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}}{\frac{(ನ+ಮ)^2 + (ನ-ಮ)^2}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}}$$

$$= \frac{(ನ^2 + ೨ನಮ + ಮ^2) - (ನ^2 - ೨ನಮ + ಮ^2)}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}$$

$$= \frac{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}{(ನ^2 + ೨ನಮ + ಮ^2) + (ನ^2 - ೨ನಮ + ಮ^2)} \times \frac{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}$$

$$= \frac{\frac{೨ನಮ}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}}{\frac{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}{(ನ-ಮ)(ನ+ಮ)}}$$

$$= \frac{\text{೨ನಮ}}{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})} \times \frac{(\text{ನ}-\text{ಮ})(\text{ನ}+\text{ಮ})}{\text{೨}(\text{ನ}^2+\text{ಮ}^2)} = \frac{\text{೨ನಮ}}{\text{ನ}^2+\text{ಮ}^2}.$$

ಆಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ (ನ-ಮ) (ನ+ಮ) ವಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನಾವು ಈ ಖದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$\begin{aligned} \text{ರಾಶಿಯು} &= \frac{(\text{ನ}+\text{ಮ})^2 - (\text{ನ}-\text{ಮ})^2}{(\text{ನ}+\text{ಮ})^2 + (\text{ನ}-\text{ಮ})^2} \\ &= \frac{(\text{ನ}^2 + ೨ನಮ + \text{ಮ}^2) - (\text{ನ}^2 - ೨ನಮ + \text{ಮ}^2)}{(\text{ನ}^2 + ೨ನಮ + \text{ಮ}^2) + (\text{ನ}^2 - ೨ನಮ + \text{ಮ}^2)} \\ &= \frac{\text{೨ನಮ}}{\text{೨}(\text{ನ}^2 + \text{ಮ}^2)} = \frac{\text{೨ನಮ}}{\text{ನ}^2 + \text{ಮ}^2}. \end{aligned}$$

ಎಂದು ಸಹ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ವಿಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಯಾವದಾದರೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಆಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಬಾಹ್ಯರೂಪವು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಅಷ್ಟೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ, ಎಂಬ ಮಹತ್ವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೮.} \quad & \frac{\text{ಕ}-\text{ನ}+\frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕ}-\text{ನ}}}{\text{ಕ}+\text{ನ}-\frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕ}+\text{ನ}}} = \frac{\text{ಕ}-\text{ನ}+\frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕ}-\text{ನ}}}{\text{ಕ}+\text{ನ}-\frac{\text{ಕನ}}{\text{ಕ}+\text{ನ}}} \\ &= \frac{(\text{ಕ}-\text{ನ})^2 + \text{ಕನ}}{\text{ಕ}-\text{ನ}} \div \frac{(\text{ಕ}+\text{ನ})^2 - \text{ಕನ}}{\text{ಕ}+\text{ನ}} = \frac{\text{ಕ}-\text{ನ}+\text{ನ}^2}{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} \\ & \quad \div \frac{\text{ಕ}+\text{ನ}^2-\text{ನ}^2}{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} \quad (1) \\ &= \frac{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}{\text{ಕ}-\text{ನ}} \times \frac{\text{ಕ}+\text{ನ}}{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} = \frac{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}{\text{ಕ}-\text{ನ}} \times \frac{\text{ಕ}+\text{ನ}}{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2} \\ & \quad \times \frac{\text{ಕ}+\text{ಕನ}+\text{ನ}^2}{\text{ಕನ}} \quad (2) \end{aligned}$$

$$= \frac{(ಕ+ನ)(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} - \frac{ಕ-ಕನ+ನ}{ಕ+ಕನ+ನ} \quad (೨)$$

$$= \frac{(ಕ+ನ)(ಕ-ಕನ+ನ) - (ಕ-ನ)(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} \quad (೩)$$

$$= \frac{(ಕ-ಕನ+ನ)\{(ಕ+ನ)-(ಕ-ನ)\}}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} \dots \dots (೪)$$

$$= \frac{೨ನ(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)}$$

ನಾಲ್ಕನೇ ಹಂತವನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆ ಬರೆಯುವ ಮುಂಚೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ
ಮೊದಲ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$= \frac{ಕ-ಕನ+ನ}{ಕ+ಕನ+ನ} \left(\frac{ಕ+ನ}{ಕ-ನ} - ೧ \right) \dots \dots (೫)$$

$$= \frac{ಕ-ಕನ+ನ}{ಕ+ಕನ+ನ} \times \frac{(ಕ+ನ)-(ಕ-ನ)}{ಕ-ನ} \dots \dots (೬)$$

$$= \frac{೨ನ(ಕ-ಕನ+ನ)}{(ಕ-ನ)(ಕ+ಕನ+ನ)} ಎಂದು ಸಹ ದೃಢೀಕರಿಸಬಹುದು.$$

ಪ್ರಭಾಗಜಾತಿಯ ಅಮೂರ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ
ಅಂತ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ

ಹೆಚ್ಚು ಕಾಳಜಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅವಶ್ಯವಿದೆ. $\frac{ಕ}{ನ}$ ಹೀಗೆ ಅಪೂರ್ಣ

ರ್ತಾಂಕವನ್ನು ಬರೆದರೆ ಕ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು $\frac{ಕ}{ನ}$ ಇದು ಭೇದವಿರುತ್ತದೆಯೋ

ಇಲ್ಲವೆ $\frac{ಕ}{ನ}$ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು ಪ ಇದು ಭೇದವಿರುವದೋ ನಿಂಬ ಸಂವೇಶವು

ಹಿಡುಗರ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವದು. ಅದುವರಿಂದ ಬರೆಯುವುದರಲ್ಲಿ

ಸಂದಿಗ್ಧತೆಯಿರಬಾರವೆಂದು ಮುಖ್ಯ ಅಂತ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ

ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ದಪ್ಪಾಗಿ ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿರಬೇಕು. ಹೀಗಿಂದರೆ

ಕ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು $\frac{ಕ}{ನ}$ ಇದು ಭೇದವಿದ್ದರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $\frac{ಕ}{ನ}$ ಎಂದು

ಇಲ್ಲಿ $\frac{೪}{೫}$ ಬಿಂದು, ಮತ್ತು $\frac{೪}{೫}$ ಇದು ಅಂಶವಿದ್ದು ಪ ಇವು ಭೇದವಿದ್ದರೆ

ಅವನ್ನು $\frac{೫}{೫}$ ಎಂದೂ ಇಲ್ಲಿವೆ $\frac{೫}{೫}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮.

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೧. $\frac{೦+೦}{೦+೫}$

೨. $\frac{೪-೫}{೦+೫}$

೩. $\frac{೫-೫}{೫+೦-೫}$

೪. $\frac{೫-೫}{೫-೫}$

೫. $\frac{೫-೫}{೫-೫}$

೬. $\frac{೫-೫+೦}{೫-೫+೦}$

೭. $\frac{೫-೫}{೦+೫+೫}$

೮. $\frac{೫+೫+೫}{೦+೫-೫}$

೯. $\frac{೫+೫+೫}{೫+೫}$

$$\text{೧೦೦.} \quad \frac{\frac{\text{ಪ}^೨}{\text{ಬಯ}} + \frac{\text{ಬ}^೨}{\text{ಪಮ}} + \frac{\text{ಮ}^೨}{\text{ಪಬ}} - ೨}{\frac{೧}{\text{ಬಮ}} + \frac{೧}{\text{ಪಮ}} + \frac{೧}{\text{ಪಬ}}}$$

$$\text{೧೦೧.} \quad \frac{\text{ಯ} - \frac{\text{ಯ} - ೧೨}{\text{ಯ} + ೮}}{\text{ಯ} + \frac{\text{ಯ} + ೨೦}{\text{ಯ} + ೮}}$$

$$\text{೧೦೨.} \quad \frac{\text{ಬ} - ೨ - \frac{೧೦}{\text{ಬ} + ೨}}{\text{ಬ} - ೪ - \frac{೧೨}{\text{ಬ} + ೨}}$$

$$\text{೧೦೩.} \quad \frac{\text{ಯ} + \frac{\text{೪ಯ} - ೧}{\text{ಯ} - ೪}}{\text{ಯ} + ೩ + \frac{೨}{\text{ಯ} - ೨}}$$

$$\text{೧೦೪.} \quad \frac{\frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಕ} - \text{ಕ}} - \frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}{\frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಅ} - \text{ಕ}} + \frac{\text{ಅ} - \text{ಕ}^೨}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}$$

$$\text{೧೦೫.} \quad \frac{\frac{೨}{೪}(\text{೫} - \text{ಯ}) - \frac{೧೨}{೮}}{\frac{೨}{೩} + \frac{೧}{೨} \left(\frac{\text{ಯ} - ೧೮}{೪} \right)}$$

$$\text{೧೦೬.} \quad \frac{\frac{\text{ಪ} + \text{ಬ}}{೧ - \text{ಪಬ}} + \frac{\text{ಪ} - \text{ಬ}}{೧ + \text{ಪಬ}}}{\frac{೧ - \text{ಪ} + \text{ಬ}}{೧ - \text{ಪಬ}} \times \frac{\text{ಪ} - \text{ಬ}}{೧ + \text{ಪಬ}}}$$

$$\text{೧೦೭.} \quad \frac{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} + \frac{೨ಕ}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} - \frac{೨ಕ}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}} + \frac{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} + \frac{೨ಕ}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}{\frac{\text{೪ಅಕ}}{\text{ಅ} + \text{ಕ}} - \frac{೨ಕ}{\text{ಅ} + \text{ಕ}}}$$

$$\text{೧೦೮.} \quad \frac{\frac{೧}{\text{ಪ}^೨} + \frac{೧}{\text{ಮ}^೨} - \frac{೨}{\text{ಪಮ}}}{\frac{೧}{\text{ಪ}} - \frac{೧}{\text{ಮ}}} - \frac{\frac{೧}{\text{ಪ}^೨} + \frac{೧}{\text{ಮ}^೨} + \frac{೨}{\text{ಪಮ}}}{\frac{೧}{\text{ಪ}} + \frac{೧}{\text{ಮ}}}$$

$$\text{೧೦೯.} \quad \frac{\text{ಯ} + ೪ - \frac{೩}{\text{ಯ} + ೨}}{\text{ಯ} + ೨ - \frac{೨}{\text{ಯ} + ೩}} \div \frac{\text{ಯ} - ೨ + \frac{೫}{\text{ಯ} + ೪}}{\text{ಯ} - ೪ + \frac{೧೨}{\text{ಯ} + ೫}}$$

$$10. \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{e}{f} - \frac{g}{h}}{\frac{e}{f} + \frac{g}{h}}$$

$$11. \frac{1 - \frac{2}{3}}{2 + \frac{3}{4}} \cdot \frac{4 + \frac{5}{6}}{1 - \frac{7}{8} - \frac{9}{10}}$$

$$12. \frac{\frac{p-1}{q} + \frac{r}{p+1}}{1 + \frac{r}{p-1}} \left(1 - \frac{r}{p+1} \right) \times \frac{\frac{p-1}{p+1} - \frac{r}{p+1}}{\frac{p}{p+1}}$$

$$13. \frac{\frac{a+b}{a+2a-10} - \frac{a+b}{a+4a-10}}{1 - \frac{2a+10}{a+10a+10}} \times \frac{\frac{a+1}{c} - \frac{d}{c}}{1 - \frac{a-1}{c}}$$

$$14. \frac{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} - 1}{\frac{p}{q} - \frac{p}{q}} \times \frac{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + 1}{\frac{p}{q} - \frac{p}{q}} \div$$

$$15. \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{p}}{1} + \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{b}}{1} + \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{1} + \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{ಪಬ} + \frac{1}{ಬಮ} + \frac{1}{ಪಮ}$$

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ
ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಜಿಲ್ಲೆಯು ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಎಂಬ ನಿಯಮವು
ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿ ಇದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು

$$\begin{aligned} \text{ರಾಶಿಯು} &= \frac{2}{3} + \frac{2(3+1)}{3(3+1)-(4 \times 3-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} \\ &= \frac{2 \times 3}{9 \times 3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} = \frac{2 \times 3}{9 \times 3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} \\ &= \frac{2 \times 3}{9 \times 3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} = \frac{2 \times 3}{9 \times 3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} \\ &= \frac{2 \times 3}{9 \times 3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} = \frac{2 \times 3}{9 \times 3} + \frac{2(3+1)}{9 \times 3} \end{aligned}$$

ಉ. ೨. $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸರಳರೂಪವನ್ನು
ಕೊಡಿರಿ.

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} &= \frac{3+3-3}{4} = \frac{3}{4} \\ &= \frac{(3-3)(3+3+3)}{4} \times \frac{3+3}{3+3+3} \\ &= (3-3)(3+3) = 3-3; \end{aligned}$$

$$3 - (3-3) = 3; \quad \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{3-3+3}{4} \div \frac{3+3}{4} = \frac{3-3+3}{4}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{3}{3+3} \\ &= \frac{3-3+3}{4} \times \frac{3}{3+3} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೯.

ಸರಳ ರೂಪವನ್ನ ಕೊಡಿರಿ.

$$೧. \frac{೧}{೨}$$

$$೨. \frac{೫}{೩೫}$$

$$\frac{೧}{೧-೩}$$

$$೩+ \frac{೨}{೫-೧}$$

$$೩. \frac{೨ಮು}{೧-೪ಮು}$$

$$೪. \frac{೧}{೧-೬}$$

$$\frac{೨-೧}{೧-೨ಮು}$$

$$\frac{೬-೧}{೬-೫}$$

$$೫. \frac{೧}{೩-೧}$$

$$೬. \frac{೧}{೩}$$

$$\frac{೩-೧}{೩-೪ಮು}$$

$$\frac{೩-೧}{೩-೨ಮು}$$

$$೭. \frac{೩-೧}{೩+೧-೩}$$

$$೮. \frac{೪ಮು-೨-೧}{೪ಮು-೧-೪ಮು-೨}$$

$$\frac{೩-೧+೧}{೩+೧}$$

$$\frac{೪ಮು-೨+೧}{೪ಮು-೧}$$

$$೯. \frac{೧}{೧-೧}$$

$$೧೦. \frac{೫}{೧-೬}$$

$$\frac{೨-೧}{೧-೫ಮು}$$

$$\frac{೫+೧}{೧+೧-೩ಮು}$$

$$೧೧. \frac{೧}{೧+೫ಮು}$$

$$೧೨. \frac{೧+೧}{೨+೧-೩}$$

$$\frac{೧+೫ಮು}{೫ಮು-೫ಮು}$$

$$\frac{೧-೧}{೨-೩}$$

೧೦.

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಗ್ರಹೀಕರಣವು.

೫.೧೫. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಗೆ ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸುತ್ತೀವೋ ಅದರಂತೆಯೇ ನಮಗೆ ಅವಕಾಶವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಎರಡು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ನಿಂಗಡಿಸಲು ಸಹ ಬರಬೇಕು. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಗ್ರಹಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವುದು ಇವು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸುವುದೋ ಅದರಂತೆ ತಿರುಗಿ $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಶ್ಯವಿದ್ದರೆ

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಗ್ರಹಿಸಲು ನಮಗೆ ಬರಬೇಕು. ಈಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಗ್ರಹವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$
 $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ಅ^3}{ಅ^3ಅ} + \frac{ಅಅ^2ಅ}{ಅ^3ಅ} + \frac{ಅಅಅ^2}{ಅ^3ಅ} + \frac{ಅ^3}{ಅ^3ಅ} \\
 &= \frac{ಅ}{ಅ} + \frac{ಅ}{ಅ} + \frac{ಅ}{ಅ} + \frac{ಅ}{ಅ} .
 \end{aligned}$$

ಹಲವು ಸಾರೆ ಹೀಗೆ ಒಡೆಯಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಕುಶಲತೆಯು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೨. $\frac{ಅಮ}{ಪಮ}$ ಇದನ್ನು ಎರಡೂ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \frac{ಅಮ}{ಪಮ} &= \frac{(ಪ+ಮ)+(ಪ-ಮ)}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\
 &= \frac{ಪ+ಮ}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} + \frac{ಪ-ಮ}{(ಪ+ಮ)(ಪ-ಮ)} \\
 &= \frac{೧}{ಪ-ಮ} + \frac{೧}{ಪ+ಮ} .
 \end{aligned}$$

ಉ. ೩. $\frac{ಅಅ+ಅ}{ಅ+ಅಅ+ಅ}$ ಈ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಎರಡು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned}
 \frac{ಅಅ+ಅ}{ಅ+ಅಅ+ಅ} &= \frac{(ಅ+ಅ)+(ಅ-ಅ)}{(ಅ-ಅ)(ಅ+ಅ)} \\
 &= \frac{ಅ+ಅ}{(ಅ-ಅ)(ಅ+ಅ)} + \frac{ಅ-ಅ}{(ಅ-ಅ)(ಅ+ಅ)} \\
 &= \frac{೧}{ಅ-ಅ} + \frac{೧}{ಅ+ಅ}
 \end{aligned}$$

ಜ. ೧೬. ಎಷ್ಟೋಸಲ (ಭಾಗಹೋಗದಿರುವ) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಾಘಾತ ಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಶ್ವೇತದಲ್ಲಿ ೨೪ಕ್ಕೆ ೬ ರಿಂದ ನಿಶೇಷ ಭಾಗಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ೪ ಇದು ರುದ್ಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲು ಬರುತ್ತದೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಶ್ವೇತದಲ್ಲಿ ಭಾಗ ಹೋಗುವದಿಲ್ಲ, ಅದುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ತೆಗೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ೪ಕ್ಕೆ, ಕೆಲವು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಂಥ, ಅಂದರೆ ಯೇ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುವದು ಹೇಗೆ ೨ಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ

$$೨ + \frac{೪}{೪} \text{ ಇರುವದೋ ಅದರಂತೆಯೇ } ೨ + \frac{೪}{೪} \text{ ಅಂದರೆ ಮಾತ್ರ } ೨ + \frac{೪}{೪}$$

ಅಲ್ಲಿ ಎಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು. ಅ $\frac{೪}{೪}$ ಅಂದರೆ ೨ $\times \frac{೪}{೪}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ ಭಿನ್ನ ಸ್ವರೂಪವಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು.

$$\text{ಅದರಂತೆಯೇ } ೨ + \frac{೪}{೪} \text{ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು, } ೨ + \frac{೪}{೪}$$

ಎಂದು ಎಂದಿಗೂ ಬರೆಯಬಾರದು.

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೪. } \frac{೨+೯}{೨+೭} &= \frac{(೨+೭)+೨}{೨+೭} \\ &= \frac{೨+೭}{೨+೭} + \frac{೨}{೨+೭} = ೧ + \frac{೨}{೨+೭} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉ. ೫. } \frac{೨-೧೧}{೨+೫} &= \frac{(೨+೫)-೧೬}{೨+೫} \\ &= \frac{೨+೫}{೨+೫} - \frac{೧೬}{೨+೫} = ೧ - \frac{೧೬}{೨+೫} \end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಅಂಶದ ಘೇನ ಅಧಿಕ ರೇಷ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ತರುಗಿ ಮಂಡಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಘೇನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ಎಷ್ಟು ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಮೂಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$\text{ಉ. ೬. } \frac{೨೨-೧೯}{೨೨-೨} = \frac{೨೨-೧೨-೭}{೨೨-೨}$$

$$= \frac{೪(೨೮-೨)-೨}{೨೮-೨} = ೪ - \frac{೨}{೨೮-೨}$$

೧೬ಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಲಘು ಮತ್ತು ಭೇದದಲ್ಲಿ ೨೮ ಇರುವುದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವು ೪ ಬರುವದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಕಾಣುತ್ತೇವೆ, ಅದುವರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು ಭೇದದ ಸಾಲು ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಶೇಷವೆಂದು ಮುಂದಿಡಲಾಗಿದೆ.

$$\text{ಉ. ೨.} \quad \frac{೬ಯ೨-೧೧ಯ-೮}{೨ಯ-೫}$$

$$= \frac{೬ಯ೨-೧೫ಯ+೪ಯ-೧೦+೨}{೨ಯ-೫}$$

$$= \frac{೬ಯ(೨ಯ-೫)+೨(೨ಯ-೫)+೨}{೨ಯ-೫}$$

$$= ೬ಯ+೨+ \frac{೨}{೨ಯ-೫}$$

೫. ೧೬. ಅಂಶದ ಪುನರ್ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವವೆಂಬುದು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟೆ. ಅಷ್ಟಕ್ಕೂ ಏನನ್ನು ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ತೀರ ಸರಳ. ಸಾರ್ಥಕ. ಈ ಸಾರ್ಥಕದಿಂದ ಹೋಗುವದಿದ್ದರೆ ಉ. ೪-೬ಗೆ ಕೃತಿಯು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬರುವದು.

$$\frac{ಯ+೨}{೨} (ಯ+೯) = ೧ + \frac{ಯ+೯}{ಯ+೨} ;$$

$$\frac{ಯ+೫}{-೧೬} (ಯ-೧೧) = ೧ - \frac{ಯ-೧೧}{ಯ+೫} ;$$

$$\frac{೨೮-೨}{-೨} (೪ಯ-೧೯) = ೪ - \frac{೨೮-೧೯}{೨೮-೨} ;$$

ಮತ್ತು

$$\begin{array}{r}
 (2y-3)(2y-1)(2y-1) \quad (2y+1) \\
 \hline
 2y-1 \\
 \hline
 2y-1 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2y-1 \\
 \hline
 2y-1
 \end{array}
 = 2y+1 + \frac{2}{2y-1}$$

ಉ. ಉ. $\frac{1}{n-3}$ ಇದಕ್ಕೆ ಭಾಗಾನುಬಂಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿ. ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ತ್ರಿಪದವಿರಬೇಕು.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n-3} &= \frac{(1-3)+(3-3)+(3-3)+3}{n-3} \\
 &= \frac{(1-3)+3(1-3)+3^2(1-3)+3^3}{n-3}
 \end{aligned}$$

$$= 1+3+3^2 + \frac{3^3}{n-3} \quad , \text{ ಇಲ್ಲಿ } \frac{3^3}{n-3} \text{ ಭಾಗಿಸಿ}$$

$$\frac{1-3}{n-3} = \frac{(1+3+3^2)}{n-3}$$

$$\frac{3}{n-3}$$

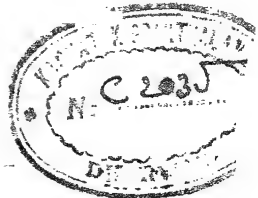
$$\frac{3-3}{n-3}$$

$$\frac{3^2-3^2}{n-3}$$

$$\frac{3^3-3^3}{n-3}$$

$$\frac{3^4-3^4}{n-3}$$

$$\frac{3^5-3^5}{n-3}$$



$$\therefore \frac{1}{n-3} = 1+3+3^2 + \frac{3^3}{n-3}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ} = \text{ಭಾಗಾಂಕ} + \frac{\text{ಶೇಷ}}{\text{ಧೇನು}}$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೦.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಜೇರಿ ಜೇರಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಆ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಪಡಿಸಿದ ಬರೆಯಿರಿ.

೧. $\frac{ಅ+ಇ+ಕ}{ಅಕಇ}$ ೨. $\frac{ಕ+ಗ+ಘ}{ಕಗಘ}$
೩. $\frac{ಇಯ-೨ಯರ+೨}{ಯರ}$ ೪. $\frac{ಯ+ರ+ಲ-೨ಯರಲ}{ಯರಲ}$
೫. $\frac{೨ಕ್ಷ-೨}{(ಕ್ಷ-೨)(ಕ್ಷ-೪)}$ ೬. $\frac{೨ರ-೨}{(ರ-೨)(ರ-೧)}$
೭. $\frac{೨ಯ-೨}{ಯ-೨ಯ+೨}$ ೮. $\frac{೨ಯ+೨}{೨ಯ+೨ಯ+೨}$
೯. $\frac{೨ನ}{ನ-೪}$ ೧೦. $\frac{೧೦ಪ}{೨೫ಪ-೯}$ ೧೧. $\frac{೮}{೧೬-೪}$
೧೨. $\frac{೬}{೨೫-೯}$ ೧೩. $\frac{೪}{ಯ+೧೨ಯ+೨೨}$ ೧೪. $\frac{೨ಪ+೨ಮ}{೪೫-೪೫}$
೧೫. $\frac{೨ಪ}{೪೫-೪೫}$ ೧೬. $\frac{೨ಪ}{೪೫-೪೫}$ ೧೭. $\frac{೨ಯ+೧೨}{ಯ-೯}$
೧೮. $\frac{೨ಯ+೨ರ}{ಯ+ಯರ+೨ರ}$

ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ತ್ರಿಪದಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಈ ಸ್ವರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

೧೯. $೧ \div (೧+ಅ)$ ೨೦. $೧ \div (೧-ಅ)$
೨೧. $(೧+ಅ) \div (೧-ಅ)$ ೨೨. $ಪ \div (೧+ಪ)$
೨೩. $(೧+ಪ) \div (೧+ಪ)$ ೨೪. $೧ \div (೧+ಅ)$

೧೧.

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳು.

೫೧೮. ಕೆಲವು ಸಲ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದ ತರಹದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ.೧. $\frac{ವ+೪}{ವ+೪} - \frac{೪}{ವ+೪}$ ಇದಕ್ಕೆ $೧ + \frac{೨}{ವ+೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ವ+೪}{ವ+೪} - \frac{೪}{ವ+೪} \right) \left(೧ + \frac{೨}{ವ+೨} \right) \\ &= \frac{(ವ+೪)-೪}{ವ+೪} \times \frac{ವ+೨+೨}{ವ+೨} \\ &= \frac{ವ+೨ವ+೧೨}{ವ+೪} \times \frac{ವ+೪}{ವ+೨} \\ &= \frac{(ವ+೨)(ವ+೨)}{ವ+೪} \times \frac{ವ+೪}{ವ+೨} \\ &= ವ+೨. \end{aligned}$$

ಉ. ೨. $\frac{ರ-೩}{ರ+೨} + \frac{೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨}$ ಇದಕ್ಕೆ

$\frac{ರ-೧}{ರ+೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ರ-೩}{ರ+೨} + \frac{೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨} \right) \div \left(\frac{ರ-೧}{ರ+೨} \right) \\ &= \frac{(ರ-೩)(ರ+೪ರ+೨) + ೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨} \div \frac{(ರ-೧)(ರ+೨)+೧೨}{ರ+೨} \\ &= \frac{ರ+೪ರ-೧ರ-೨೪+೨ರ+೧೪}{ರ+೪ರ+೨} \div \frac{ರ+೩ರ-೨+೧೨}{ರ+೨} \\ &= \frac{ರ+೪ರ+೩ರ-೧೦}{ರ+೪ರ+೨} \div \frac{ರ+೩ರ+೧೦}{ರ+೨} \end{aligned}$$

$$= \frac{(c-1)(c+2)(c+3)}{(c+1)(c+2)} \times \frac{c+3}{(c+2)(c+3)}$$

$$= \frac{c-1}{c+1}$$

ಉ. ೩. $\frac{n+4}{n+2} + \frac{2n+10}{n+4} - \frac{3n+12}{n+2}$ ಈ ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{n+4}{n+2} + \frac{2n+10}{n+4} - \frac{3n+12}{n+2}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{n+2}\right) + \left(2 + \frac{6}{n+4}\right) - \left(3 + \frac{6}{n+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{n+2} + \frac{6}{n+4} - \frac{6}{n+2} \dots (1)$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{6}{n+4} - \frac{4}{n+2} \dots \dots \dots (2)$$

$$= \frac{2(n+4) - 4(n+2) + 6(n+2)}{(n+2)(n+4)(n+2)} \dots (3)$$

$$= \frac{2(n^2+4n+8) - 4(n^2+2n+4) + 6(n^2+2n+4)}{(n+2)(n+4)(n+2)} \dots (4)$$

$$= \frac{2n^2+8n+16 - 4n^2-8n-16 + 6n^2+12n+24}{(n+2)(n+4)(n+2)} \dots (5)$$

$$= \frac{4n+16}{(n+2)(n+4)(n+2)} \dots \dots \dots (6)$$

ಉ. ೪. $\frac{y^2}{y+1} - \frac{2y^2+4y+2}{y+2} + \frac{y^2+4y+4}{y+2}$

ಇದರ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$\frac{2y^2+4y-2}{y+2} + \frac{y^2+4y+4}{y+2}$$

$$= \frac{ಯ-೧+೧}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ(ಯ+೨)+೨}{ಯ+೨} + \frac{ಯ-೨+೨ಯ+೨+೧}{ಯ+೨} \dots \dots \dots (೧)$$

$$= \frac{(ಯ-೧)(ಯ+೧)+೧}{ಯ+೧} - \frac{೨ಯ(ಯ+೨)+೨}{ಯ+೨} + \frac{(ಯ+೧)(ಯ+೨)+೧}{ಯ+೨} \dots \dots \dots (೨)$$

$$= ಯ-೧ + \frac{೧}{ಯ+೧} - ೨ಯ - \frac{೨}{ಯ+೨} + ಯ+೧ + \frac{೧}{ಯ+೨} \dots \dots \dots (೩)$$

$$= \frac{೧}{ಯ+೧} - \frac{೨}{ಯ+೨} + \frac{೧}{ಯ+೨} \dots \dots \dots (೪)$$

$$= \frac{(ಯ-೨)(ಯ-೨) - ೨(ಯ-೧)(ಯ-೨) - (ಯ-೧)(ಯ-೨)}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)ಯ+೨} \dots \dots \dots (೫)$$

$$= \frac{(ಯ-೨)(ಯ-೨) - ೨(ಯ-೧)(ಯ-೨) - (ಯ-೧)(ಯ-೨)}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೨)} \dots \dots \dots (೬)$$

$$= \frac{೨}{(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೨)} \dots \dots \dots (೭)$$

ಮೇಲಿನ ವಿವರ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾನ್ವಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವ ಇದ್ದರೆ ಕೃತಿಯು ಸ್ವಲ್ಪ ಜೊತೆಯುತ್ತಿತ್ತು ಮತ್ತು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

೧. ಯ-೫ + $\frac{೫}{೨ಯ-೨}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ - $\frac{೪}{೨ಯ-೫}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೨. $೨ಯ + ೨ + \frac{೧೬}{ಯ-೨}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ - $\frac{೪}{೨ಯ-೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೩. $\frac{೬}{೬ಯ} + \frac{೬}{೬ಯ}$ ಇದಕ್ಕೆ $\frac{೧}{೬ಯ} - \frac{೧}{೬ಯ} + \frac{೧}{೬ಯ}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೪. $\frac{ಪು}{ಮು} + ೧ + \frac{ಮು}{ಪು}$ ಇದಕ್ಕೆ $\frac{೧}{ಮು} + \frac{೧}{ಪು} + \frac{೧}{ಪು}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೫. $ನು + ನಮ + ಮು + \frac{ಅಮು}{ನ-ಮ}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ + $\frac{ಅಮು}{ನ-ಮ}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೬. $ಯು + ಪು - \frac{ಯುವು}{ಯು + ಪು}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ - $\frac{ಯವು}{ಯು + ಪು}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

೭. $ಪ-೨ + \frac{೪}{ಪ-೨}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ + $\frac{೨}{ಪ-೨}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

೮. $೧ + \frac{ಮು}{ಪು} - \frac{ಮು}{ಮು}$ ಇದಕ್ಕೆ ೧ + $\frac{ಅಪಮು}{(ಪ-ಮು)}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೯. $\frac{ರ-೪}{ರ-೧} - \frac{ಅರ-೬}{ರ-೨} + \frac{ರ-೨}{ರ-೩}$

೧೦. $\frac{ಅಯ-೩೦}{ಯ-೪} + \frac{ಅಯ-೫}{ಯ-೨} - \frac{೧೦ಮು+೬೧}{ಯ+೬}$

೧೧. $\frac{೩ಯ-೧೦ಯ+೪}{ಯ-೩} + \frac{ಅಯ-೫ಯ+೩}{ಯ-೨}$
 $-\frac{೫ಯ-೭ಯ+೪}{ಯ-೧}$

೧೨. $\frac{ಪು+ಅಪಮು+ಮು+೧}{ಪ+ಮು} - \frac{ಅಪು+೪ಪಮು+೨}{ಪ+ಅಮು}$
 $+ \frac{ಪು-ಅಪಮು+ಮು+೧}{ಪ-ಮು}$

ಆರವೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ
ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

೧.

೬.೧. ಮುಂದೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಪು. ೨೧-೫೪ ಮತ್ತು ೨೦೯-೨೨೨) ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರಿಹರಿಸುವುದು ಅಂದರೆ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು (ಹೆಲಿಗಳನ್ನು) ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಅದೇ ವಿಷಯದ ಮುಂದೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ. ಇಲ್ಲಿ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡತಕ್ಕ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಜೋಡಿಯೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು ಸಾಧಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಅದಕ್ಕೆ ಮುಂದೆ ಬಿಡಿಸಿ ತಿಳಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತೆ, (ಅಯ + ಇರ = ಕ) ಈ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು.

ಉ.೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$ಚ(ಯ - ೩ರ) - ೨(೨ಯ + ೪ರ - ೧೦) = ೩ - ೪ಯ;$$

$$೮(೨ರ - ಯ) + ೫(೨ಯ - ೪ರ + ೧) = ೩(ಯ + ೪) - ೪.$$

$$\text{ಮೊ. ಸ. ಬಿಡಿಸಿ, } ೫ಯ - ೧೫ರ - ೨ಯ - ೪ರ + ೨೦ = ೩ - ೪೫$$

$$\therefore -ಯ - ೨೩ರ + ೨೦ = ೩ - ೪ಯ$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } -ಯ - ೨೩ರ + ೪ಯ = ೩ - ೨೦$$

$$\therefore ೩ಯ - ೨೩ರ = -೧೭ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

$$\text{ಎ. ಸ. ಬಿಡಿಸಿ, } ೧೬ರ - ೮ಯ + ೧೦ಯ - ೨೦ರ + ೫ = ೩ಯ + ೩ರ - ೪$$

$$\therefore ೨ಯ - ೪ರ + ೫ = ೩ಯ + ೩ರ - ೪$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, } ೨ಯ - ೪ರ - ೩ಯ - ೩ರ = -೪ - ೫$$

$$\therefore -ಯ - ೭ರ = -೯ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

$$೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, -೩ಯ - ೨೧ರ = -೨೭ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೩)$$

$$(೧) \text{ ಮತ್ತು } (೩) \text{ ಇವುಗಳ ವೇರೀಜವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ -೪೪ರ = -೪೪}$$

$$\therefore ರ = ೧$$

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $r = 0$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು, $-y - 2 = -3$
 ಅ. $-y = -1$, ಅ. $y = 1$.
 $y = 1$, $r = 0$.

ಉ.೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$y - \frac{2r - 2y - 0}{3} = \frac{2y - 2r + 0}{2} - 0;$$

$$2r - \frac{2r - 2y + 0}{3} = 2y - 2 - \frac{2y + 2r}{2}.$$

ವಿ.ಸ.ಕ್ಕೆ ಅಳಿ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$2y - 2(2r - 2y - 0) = 2(2y - 2r + 0) - 0$$

$$\therefore 2y - 4r + 4y + 0 = 4y - 4r + 0 - 0$$

$$\therefore 2y - 4r + 4y = 4y - 4r - 0$$

ಪಕ್ಷಾಂತರವಿಡಿದು, $2y - 4r - 4y + 4r = -0 - 0$

$$\therefore 0y + 0r = -0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ವಿ.ಸ.ಕ್ಕೆ 0 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$2r - 2(2r - 2y + 0) = 4y - 2 - 2(2y + 2r)$$

$$\therefore 2r - 4r + 4y - 4 = 4y - 2 - 4y - 4r$$

$$\therefore 2r + 4y - 4 = 4y - 4r - 2$$

ಪಕ್ಷಾಂತರವಿಡಿದು, $2r + 4y - 4y + 4r = -2 + 4$

$$\therefore -2r + 2r = -2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

0 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$-4y + 2r = -2$$

(1)ಕ್ಕೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$4y + 0r = -4$$

ಬೇರ್ಪಡಿಸಿದ,

$$4r = -4$$

$$\therefore r = -1.$$

(೨)ನೆಯದರಲ್ಲಿ $r = -1$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, $-y - 2 = -3$,

$$\text{ಅ. } -y = -1, \text{ ಅ. } y = 1.$$

$$y = 1, r = -1.$$

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{x-y-z-1}{3} = \frac{x+y+z-2}{2} = \frac{x-y-z-2}{2}$$

$$\frac{x-y-z-1}{3} = \frac{x-y-z-2}{2} \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$\frac{x+y+z-2}{2} = \frac{x-y-z-2}{2} \quad \text{ಹೀಗೆ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ}$$

ತಿಗೆಮುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

$$\text{ಮೊ.ಸ.ವ ಮೇಲಿಂದ} \quad x(y-z-2) = 2(x-y-z-1)$$

$$\therefore 2xy - 2xz - 2x = 2x - 2y - 2z - 2$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ,} \quad 2xy - 2xz - 2x + 2y + 2z = -2 + 2x$$

$$\therefore 2xy - 2xz = 2x$$

$$2x \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ,} \quad y - z = 1 \quad (1)$$

$$\text{ಎ. ಸ. ವ ಮೇಲಿಂದ} \quad 2(x+y-z-2) = 2(x-y+z-2)$$

$$\therefore 2xy - 2xz - 2x = 2x - 2y + 2z - 4$$

$$\text{ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ,} \quad 2xy - 2xz - 2x - 2y + 2z = -4 + 2x$$

$$\therefore 2xy - 2xz = 2x \quad (2)$$

$$(1) \text{ ನೆಯದನ್ನು } 2 \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, } 2x - 2z = 2x$$

$$\text{ವಜಾಬಾಕಿಯಿಂದ} \quad -2z = -2x$$

$$\therefore z = x$$

$$(1) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } z = x \text{ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, } y - x = 1,$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } y = x + 1$$

$$y = x + 1; \quad z = x.$$

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(x+y+z)(x+y-z) - 4 = (x-y)(x-y-z);$$

$$(x-y-z)(x+y+z) = (x-y-z)(x+y+z) - 4.$$

ಮೊ. ಸ. ವಸ್ತು ಬಿಡಿಸಿ,

$$ಯರ + ೨ಯ + ೨ರ + ೨ = ಯರ - ೨ಯ - ೨ರ + ೨$$

ಎರಡೂ ಬದಿಗಳೊಳಗಿಂದ ಯರ ವಸ್ತು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ,

$$೨ಯ + ೨ರ - ೨ಯ = -೨ಯ - ೨ರ + ೨$$

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೨ಯ + ೨ರ + ೨ಯ + ೨ರ = ೨ + ೨೨

$$\therefore ಯ + ರ = ೨೫ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೧)$$

ಎ. ಸ. ವಸ್ತು ಬಿಡಿಸಿ, ೬ ಯರ + ೨ಯ - ೨ರ - ೧ = ೬ಯರ + ಯರ - ೨ರ + -೧. ಎರಡೂ ಬದಿಗಳೊಳಗಿಂದ ೬ ಯರ ವಸ್ತು ತೆಗೆದು-
ಲಾಗಿ, ೨ಯ - ೨ರ - ೧ = ಯರ - ೧೨

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, ೨ಯ - ೨ರ - ಯರ = -೧೨ + ೧

$$\therefore ಯ - ೨ರ = -೧೧ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (೨)$$

(೧) ನೆಯಮೊಳಗಿಂದ (೨) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

೨ರ = ೪, ಅಂ. ರ = ೧೨.

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ರ = ೧೨ ಹಿಡಿದು, ಯ + ೧೨ = ೨೫,

ಅಂ. ಯ = ೨೫ - ೧೨ = ೧೩.

ಯ = ೧೩ ; ರ = ೧೨ .

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೬ಯ - \frac{೨೧ರ}{೨} = ೧೫೪ ; \quad ೧೧ಯ - \frac{೧೪೨ರ}{೨} = ೨೨.$$

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ೬ ಇದು ಅವ-
ಯವಿಷ್ಟು ಎರಡನೆಯದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ೧೧ ಇದು ಅವಯವ-
ವಿಷ್ಟು ಕೂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ನಿತ್ಯದ ರೂಢಿಯ ಮಾರ್ಗದಿಂದ-
ಹೋಗಿದೇ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸುಲಭ ರೀತಿಯಿಂದ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು
ಮುಂದಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಮೊ. ಸ. ವಸ್ತು ಒಂದರ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಯ - ೨ರ = ೨೨ \dots \dots (೧)

ಎ. ಸ. ವಸ್ತು ೧೧ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಯ - \frac{೧೪೨ರ}{೨} = ೨ \dots \dots (೨)

ವಜಾಣಾಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, \quad \quad \quad ೫ ರ = ೨೦

11) ಡಿ. ಎ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೬೧

$$\therefore r = 4$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $r = 4$ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$$y - 2 = 2x, \text{ ಅಂ. } y = 2x.$$

$$y = 2x; r = 4.$$

ಉ. ೬. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$9x + y = 12; 9x + y = 12.$$

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ,

$$9x + y = 12$$

೨೫ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ,

$$y + r = 2 \dots (೧)$$

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ, $-4x + 4r = 4$

$$\therefore -y + r = 1 (2)$$

(೧) ಮತ್ತು (೨) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜನಿಂದ,

$$2r = 3, \text{ ಅಂ. } r = 1.5, \text{ ಆದುದರಿಂದ } y = 0.5.$$

$$y = 1; r = 4.$$

ಉ. ೭. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$9x + y = 12; 9x + y = 12.$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಿ

$$9x + y = 12$$

ಮತ್ತು ೨೦ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ,

$$9x + y = 12 (೧)$$

ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ,

$$9x + y = 12 (2)$$

(೧) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$9x + y = 12 (3)$$

(೨) ನೆಯದರೊಳಗಿಂದ (೩) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ $y = 2$

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ $y = 2$ ಎಂದು ಹಾಕಿ,

$$x + 2 = 12, \text{ ಅಂ. } x = 10 - 2 = 8, \text{ ಅಂ. } r = 2.$$

$$\therefore y = 2; r = 2.$$

ಉ. ೮. ಬಿಡಿಸಿರಿ : $9x + y = 12; 9x + y = 12.$

ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ

$$9x + y = 12$$

೮೦ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಯ - ರ = - ೨

ಈಗ $೧೧೭ಯ + ೩೭ರ = ೮೬, ೮೦ಯ + ೩೭(ಯ - ರ) = ೮೬$
 $\therefore ೮೦ಯ + ೩೭(-೨) = ೮೬, ೮೦ಯ = ೮೬ + ೭೪ = ೧೬೦.$

$\therefore ಯ = ೨; ರ = ೪.$

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪವಾದ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಬೇಗನೆ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ

ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸ ರೀತಿ (ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮ)

೬.೨. ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದು ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಮೂರು ರೀತಿಗಳನ್ನು — ಯೋಗವಿಯೋಗ ರೀತಿ, ಉತ್ಥಾಪನ (ಇಲ್ಲವೆ ಅದೇಶ) ರೀತಿ, ಮತ್ತು ತುಲನೆಯ ರೀತಿ— ಹಿಂದೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಾ.

ಯಾವದೇ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಾದಾ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿ ಅದನ್ನು $ಅಯ + ಇರ + ಉ = ೦$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$ಅಯ + ಇರ + ಉ = ೦$ (೧) ಮತ್ತು

$ಅಯ + ಈರ + ಊ = ೦$ (೨) ಇದು ಒಂದು

ಜೋಡಿ ಇದೆ ಎಂದು ಮತ್ತು ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ಅಂಶಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

(೧) ನೆಯದನ್ನು ಈ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ, $ಅಯ + ಇಈರ + ಈಉ = ೦$
 ಮತ್ತು (೨) ನೆಯದನ್ನು ಇ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ, $ಅಇಯ + ಇಈರ + ಇಊ = ೦$
 ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, $(ಅಈ - ಅಇ)ಯ + ಈಉ - ಇಊ = ೦$
 ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ, $(ಅಈ - ಅಇ)ಯ = ಇಊ + ಈಉ$

ಯ

೧

ಇಊ + ಈಉ

ಅಈ - ಅಇ

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೩

ಅದರಂತೆಯೇ (೨) ನೇಯದನ್ನು ಆ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅಆಯ+ಆಈರ+ಉಆ=೦,

ಮತ್ತು (೧) ನೇಯದನ್ನು ಆ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಅಆಯ+ಆಈರ+ಉಆ=೦

ವಜಾಬಾಕಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, (ಆಈ-ಆಇ)ರ+ಉಆ-ಉಆ=೦

ಪಕ್ಷಾಂತರದಿಂದ (ಆಈ-ಆಇ)ರ = ಉಆ-ಉಆ

$$\therefore \frac{ರ}{ಉಆ-ಉಆ} = \frac{೧}{ಆಈ-ಆಇ}$$

$$\therefore \frac{ಯ}{ಇಊ-ಈಉ} = \frac{ರ}{ಉಆ-ಉಆ} = \frac{೧}{ಆಈ-ಆಇ}$$

ಇದಕ್ಕೆ ವಜ್ರಾಭ್ಯಾಸದ ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಯ ನಿಯಮವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಅದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡುವ ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯು ಹೀಗೆ ಇರುವದು.

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಳಗಿನ ನಡುವಿನ ಪದದ

ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಆ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ, ಸ್ಥಿರಪದವನ್ನೂ,

ಮೊದಲನೇ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗಾಗಿ ಸಿರುಗಿ

ನಡುವಿನ ಪದದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನೂ, ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ಎರಡು ಸಾಲು-

ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಮತ್ತು ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕತ್ತರಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು

ಮಾಡಬೇಕು.



ಅಭೋಮುಖ ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಗುಣಾಕಾರಗಳು

ಧನ ಮತ್ತು ಉನ್ಮುಖ ಬಾಣಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು

ಮುಖ ಇರುವವು.

ಇಊ+ಈಉ, ಉಆ-ಉಆ ಮತ್ತು ಆಈ-ಆಇ ಇವು

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯ, ರ, ಮತ್ತು ೧ ರ ಭೇದಗಳಿರುವವು.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ-
ದಕ್ಕಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಉ. ೨. ರೊಳಗಿನ $೧೪ಯ + ೪೭ರ + ೧೯ = ೦$
ಮತ್ತು $೩ಯ - ೨೦ರ - ೨೬ = ೦$

ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ; ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ,

$$\frac{\text{ಯ}}{೪೭(-೨೬) - (-೨೦)೧೯} = \frac{\text{ರ}}{೧೯ \cdot ೩ - (-೨೬)೧೪} =$$

$$\frac{\text{ಯ}}{೧೪(-೨೦) - ೩ \cdot ೪೭}$$

$$\therefore \frac{\text{ಯ}}{-೧೭೨೦ + ೩೪೦} = \frac{\text{ರ}}{೫೭ + ೩೬೪} = \frac{\text{೧}}{-೨೦ - ೧೪೧}$$

$$\therefore \frac{\text{ಯ}}{-೧೪೨} = \frac{\text{೧}}{೪೨೧} = \frac{\text{ರ}}{-೪೨೧}$$

$$\therefore \text{ಯ} = \frac{-೧೪೨}{-೪೨೧} = ೨ \text{ ಮತ್ತು } \text{ರ} = \frac{೪೨೧}{-೪೨೧} = -೧$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

೧. $\frac{\text{ಯ}}{೩} + \frac{\text{ರ}}{೪} = ೭$; $\text{ಯ} - \text{ರ} = ೧೪$.

೨. $\frac{\text{ಪ} - \text{ಮ}}{೩} + \frac{\text{ಪ} + \text{ಮ}}{೪ರ} = ೫$; $\frac{\text{ಪ} - \text{ಮ}}{೪} - \frac{\text{ಪ} + \text{ಮ}}{೩} = ೫$.

೩. $\frac{\text{ದ} + ೯}{೯} = \frac{೪೩}{೯}$; $\frac{\text{ದ}}{೯ - ೧} = \frac{೨೩}{೯}$.

೪. $೫ನ + ೨ಮ = ೩ನ + ೫ಮ = ೧೯$.

೫. $೩ಯ - ೮ರ + ೪ = ೫ಯ - ೧೨ರ + ೩೩ = ೬ಯ - ೪ರ - ೯$.

೬. $\frac{\text{ಪ} + \text{ಮ} - ೧}{೫} = \frac{\text{ಪ} - \text{ಮ} + ೧}{೪} = ೧$.

೭. $\frac{೫}{\text{ಯ} - ೮} = \frac{೨೦}{\text{ಯ} + ೮} = \frac{೧}{೨}$.

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೬೫

$$ಫ. ೪(೩ಯ-೮)=೧೮ \left(\frac{ಯ}{೨} - \frac{೮}{೪} \right) = ೯.$$

$$ಫ. \frac{೧}{೨} (೧೩-೩ಯ-೮) = \frac{೨}{೩} (೩-ಯ-೨೮) = \frac{೧}{೫} (೮-೨ಯ-೩೮).$$

$$೧೦. \frac{೨೮+೮ವ}{೧೬} = \frac{೧೫}{೨} = \frac{೧೫(೮-ವ)-(೨೫ವ-೯೮)}{೯೦}.$$

$$೧೧. \frac{೩ನ}{೧೦} = \frac{೩ವ}{೮} = ೫; \frac{೩ನ}{೫} + \frac{೪ವ}{೩} + \frac{೧}{೩} = ೦.$$

$$೧೨. \frac{೩}{೨} + \frac{ನ}{೩} = ೨೦; \frac{೩ನ}{೫} - \frac{೫ತ}{೯} + \frac{೧}{೯} = ೩.$$

$$೧೩. \frac{೫ಯ-೨೮}{೮ಯ+೮} = \frac{೧}{೧೦}; ೩(ಯ+೮+೨)=೫(೮-೩ಯ+೫)+೯.$$

$$೧೪. \frac{೫ಯ-೮}{೨ಯ-೧} = \frac{೫೮+೧}{೨೮+೩}; \frac{೪ಯ-೩}{೮ಯ-೯} = \frac{೩೮+೨}{೨೮+೧}.$$

$$೧೫. \frac{೮}{೪} - \frac{೩}{ನ} = \frac{೪}{ಕನ}; \frac{೫}{ಕ} + \frac{೨}{ನ} = \frac{೧೮}{ಕನ}.$$

$$೧೬. \frac{೧೨}{೪} + ೮ = \frac{೧೫ಯ}{೪}; ಯ + ೩ \frac{೧}{೨} = \frac{೩೪}{ಯ}.$$

$$೧೭. ೮(ಪ-೩)+೨(೪-೮)=೨;$$

$$\frac{೧೧}{ಪ+೩} + \frac{೩}{೮+೮} = ೪ \left(\frac{೧೦}{ಪ+೩} - \frac{೩}{೮+೮} \right).$$

$$೧೮. ೧೯ \left(\frac{೪}{೮-ಕ} + \frac{೩}{೨೮+೩ಕ} \right) = ೩೫ \left(\frac{೨}{೮-ಕ} + \frac{೫}{೨೮+೩ಕ} \right);$$

$$೩(೮-೩ಕ+೩) = ೧೫-೪(೩ಕ-೮-೧).$$

$$೧೯. \frac{೩ಯ+೩೮}{೫೮-೧೨ಯ} = ೨; ೮(೩ಯ-೪೮+೫) =$$

$$೫(೩೮-೮ಯ+೨).$$

೨೦. ೨೭ಯ + ೪೯ರ = ೧೦೩; ೪೯ಯ + ೨೭ರ = ೧೨೫.

೨೧. ೧೦೨ರ - ೭೯ವ = ೪೨೩; ೭೯ರ - ೧೦೨ವ = ೪೫೩.

೨೨. ೧೨೫ಯ + ೮೭ಕ್ಷ = ೪೯; ೩೭ಯ + ೨೧ಕ್ಷ = ೫.

೨೩. ೧೦೩ರ - ೩೩ಸ = ೨೭೬; ೩೩ರ + ೩೭ಸ = ೧೩೬.

೨.

$$\frac{ಅ}{ಯ} + \frac{ಇ}{ರ} = ಉ; \frac{ಆ}{ಯ} + \frac{ಈ}{ರ} = ಊ.$$

೨.೩. ಈಗ $\frac{ಅ}{ಯ} + \frac{ಇ}{ರ} = ೪$ (೧); $\frac{ಆ}{ಯ} + \frac{ಈ}{ರ} = ೩$ (೨)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪವು ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಬಿಡಿಸಿದ ದ್ವಿವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪದಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಯ, ರ) ಅಂಶಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರದೆ ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ.

ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವದು? ಇಲ್ಲಿ $\frac{ಅ}{ಯ}$ ಮತ್ತು $\frac{ಇ}{ರ}$ ಇವುಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ ಮತ್ತು ಮ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$೨ಪ + ೧೫ಮ = ೪ \dots\dots (೩) \text{ ಮತ್ತು}$$

$$೩ಪ + ೧೦ಮ = ೩ \dots (೪) \text{ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ತರುವಾಯ}$$

$$(೩) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೩ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ} \quad ೬ಪ + ೪೫ಮ = ೧೨$$

$$\text{ಮತ್ತು } (೪) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ} \quad ೬ಪ + ೨೦ಮ = ೬$$

$$\text{ವಜಾಬಾಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ} \quad ೨೫ಮ = ೫, \text{ ಆಂ. ಮ} = \frac{೧}{೫}.$$

$$(೩) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ} \quad ಮ = \frac{೧}{೫} \text{ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,}$$

$$೨ಪ + ೩ = ೪, \text{ ಆಂ. } ೨ಪ = ೧, \text{ ಆಂ. ಪ} = \frac{೧}{೨}$$

$$\therefore ಪ = \frac{೧}{೨} \text{ ಮತ್ತು ಮ} = \frac{೧}{೫}$$

$$\therefore ಯ = ೨; \quad ರ = ೫.$$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೬೭

ಆದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{೧}{ಯ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{ರ}$ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಪ ಮತ್ತು ಮ ಗಳಿಂದ ಮಾಡದೇ ಕೂಡ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಸರಳವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

$$(೧) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೩ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೬}{ಯ} + \frac{೪೫}{ರ} = ೧೨ \text{ ಮತ್ತು}$$

$$(೨) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೬}{ಯ} + \frac{೨೦}{ರ} = ೭$$

ವಜಾಬಾಕೆಯಿಂದ $\frac{೨೫}{ರ} = ೫,$

$$ಅಂ ರ = ೫.$$

$$(೧) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ರ = ೫ \text{ ಎಂದು ಹಿಡಿದು } \frac{೨}{ಯ} + ೩ = ೪,$$

$$ಅಂ. \frac{೨}{ಯ} = ೧, \text{ ಅಂ } ಯ = ೨. \text{ ಯ} = ೨; ರ = ೫.$$

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವ ಮಾರ್ಗವು ನಮಗೆ ಸರಿ ಬರುವದೋ ಅವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೆಯದು ಸುಲಭವಾದದ್ದು.

ಈಗ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯ ಮತ್ತು ರ ಈ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ೧ ಇರದೇ ೧ ರಿಗಿಂತ ಜೇರೆ ಇವೆ.

$$\text{ಉ. ೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ: } \frac{೮}{೨ಯ} - \frac{೩}{೨ರ} = ೧೧; ೨ಯ + \frac{೫}{೮ರ} = \frac{೩}{೪}.$$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೨ ಮತ್ತು ೨ ಇವುಗಳ ೮. ಸಾ. ಏ. ೬ ಇದರಿಂದ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೨ ಮತ್ತು ೮ ಇವುಗಳ ೮. ಸಾ. ಏ. ೮ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ,

$$\frac{೧೬}{ಯ} - \frac{೯}{ರ} = ೬೬ \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{೧೨}{೪} + \frac{೫}{೮} = ೨೬ \dots (೨)$$

$$(೧) \text{ನೆಯದನ್ನು ೩ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೪೮}{೪} - \frac{೨೭}{೮} = ೧೯೮$$

$$\text{ಮತ್ತು (೨)ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೪೮}{೪} + \frac{೨೦}{೮} = ೧೦೪$$

$$\text{ಪದಾರ್ಥವಿರುವ, } - \frac{೪೭}{೮} = ೯೪$$

$$\therefore ೮ = - ೭$$

ಅನೆಯದರಲ್ಲಿ ೮ = - ೭ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$$\frac{೧೨}{೪} - ೧೦ = ೨೬, \text{ ಅಂ. } \frac{೧೨}{೪} = ೩೬, \text{ ಅಂ. } ೪ = \frac{೧}{೩}$$

$$\therefore ೪ = \frac{೧}{೩}; \quad ೮ = \frac{೧}{೨}$$

ಈಗ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅವು ಹಾಗೆ ಇಲ್ಲ.

ಉ. ೩. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{೫}{೨೪} - \frac{೮}{೩೮} = ೬ \frac{೫}{೪}; \quad ೧೨೪ + ೨೮ = ೯೪೮.$$

ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ೪೮ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ (ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ ೪ ೮ ಗಳು ಭೇದಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಯಾವುದರ ಮಾನವು ಶೂನ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹಿಡಿಯಲು ಯಾವುದೂ ಅಡ್ಡಿ ಇಲ್ಲ.)

$$\frac{೧೨}{೮} + \frac{೨}{೪} = ೯ \text{ ಅಂದರೆ } \frac{೨}{೪} + \frac{೧೨}{೪} = ೯.$$

$$\text{ಮೊ. ಸ. ವನ್ನು ೬ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, } \frac{೧೨}{೪} - \frac{೧೬}{೮} = ೪೧ \dots (೧)$$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ನೆಪ್ರತ್ಯೆಗಳು ೧೬೯.

ಮತ್ತು
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \dots (2)$$

ನಿತ್ಯದಂತೆ $\frac{1}{y}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{z}$ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು x ಮತ್ತು k ಗಳಿಂದ

ಮಾಡಿದರೆ, $10x - 10k = 40 \dots (3)$

ಮತ್ತು $2x + 10k = 1 \dots (4)$

(3) ನೆಯದನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $20x - 20k = 80$ ಮತ್ತು

(4) ನೆಯದನ್ನು 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $8x + 40k = 4$

ದೇವೀಜಿನಿಂದ $12x = 84$, ಅಂ. $x = 7$.

(4) ನೆಯದರಲ್ಲಿ $x = 7$ ಎಂದು ಹಿಡಿದರೆ, $8 + 10k = 1$ ಅಂ. $10k = -7$,

ಅಂ. $k = -\frac{7}{10}$.

$\therefore x = 7$, ಮತ್ತು $k = -\frac{7}{10}$.

$\therefore y = \frac{10}{7}$; $z = \frac{10}{3}$.

ಉ. ೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$x - y = 0$; $\frac{x}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$.

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ $x = y$. ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಪ, ದ ಬದಲಾಗಿ y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$\frac{y}{y} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$ ಅಂ. $\frac{y-1}{y} = \frac{1}{y}$,

ಅಂ. $y-1 = 1$ ಅಂ. $y = 2$,

ಅಂ. $x = 2$, ಮತ್ತು $x - y = 0$ ಇದ್ದುದರಿಂದ

$x = 2$, ಅಂ. $y = 2$, $x = 2$.

ಉ. ೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$2x - 3k = 0$; $\frac{1}{2x} - \frac{3}{k} = 0$.

ಎರಡನೇ ಸಮೀ- ೧ = $\frac{೫}{೬}$ ಅಂ. ೬ಕ = ೧೫ಅ, ಅಂ. ೩ಕ = ೭೫ಅ.
ಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ ೩ಅ = ೬ಕ

ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ೩ಕ, ದ ಬದಲಾಗಿ ೭೫ ಅ ಇಟ್ಟರೆ,

$$೮ಅ - ೭೫ಅ = ೧, \text{ ಅಂ. } ೭೫ಅ = ೧, \text{ ಅಂ. } ಅ = ೨.$$

ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅ = ೨ ಎಂದು ಹಿಡಿದು,

$$೧೬ - ೩ಕ = ೧, \text{ ಅಂ. } ೩ಕ = ೧೫, \text{ ಅಂ. } ಕ = ೫. \text{ ಅ = } ೨; ಕ = ೫.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೩.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೧. \frac{೧೭}{೪} - \frac{೭}{೮} - ೫ = ೦; \frac{೧೦}{೪} - \frac{೧೧}{೮} + \frac{೧}{೩} = ೦.$$

$$೨. \frac{೭೫}{೯} - \frac{೬}{೪} - ೯ = ೦; \frac{೧೫}{೯} + \frac{೪}{೯} = \frac{೧}{೩}.$$

$$೩. \frac{೧}{೪} + \frac{೧}{೪} = \frac{೧}{೨}; \frac{೭}{೪} - \frac{೮}{೪} = \frac{೧}{೨}.$$

$$೪. \frac{೭}{೭೪} - \frac{೫}{೩೮} = \frac{೫}{೩೮}; \frac{೫}{೩೮} + \frac{೩}{೮} = \frac{೫೫}{೩೮}.$$

$$೫. \frac{೫}{೮೪} - \frac{೭}{೩೪} + \frac{೩}{೪} = ೦; \frac{೯}{೮೪} + \frac{೧೧}{೩೪} = \frac{೧೫}{೩೪}.$$

$$೬. ೫ಅ - ೯ಕ + ೯೦ಅ = ೦; \frac{೭}{೮} + \frac{೧}{೪} = ೦.$$

$$೭. ೧೦ಅ = ೯ಅ + ೧೬ಕ; \frac{೧}{೮} - \frac{೧}{೪} = \frac{೧}{೮}.$$

$$೮. ೨೪ಯ + ೧೪ರ - ೪ರ = ೦; ೩ಯ + ೭ರ - ೨೪ಯ = ೦.$$

$$೯. ೫ಲ + ೩ವ - ೧೬ಲವ = ೦; \frac{೪}{೮} + \frac{೭}{೪} + ೩ = ೦.$$

$$೧೦. (೨ಕ - ೩)(೩ನ - ೪) = ೧೨ = \frac{೪೫}{೪} + \frac{೪}{೪}$$

ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೧.

$$೧೧. ೫ರ - \frac{೨}{೨೨} = ೧೦\frac{೧}{೯}; ೮ರ + \frac{೧೨}{೫೨} = ೧೫\frac{೨}{೫}$$

$$೧೨. ೨೫ - ೨\frac{೨}{೫} = \frac{೬}{೫೨}; ೧೦೫ = \frac{೯}{೪೨} + ೧೯\frac{೧}{೪}$$

$$೧೩. \frac{೨+೮}{೨೮} = \frac{೨}{೪}, \frac{೨-೮}{೨೮} = \frac{೧}{೪}$$

$$೧೪. \frac{೮}{೮} + \frac{೨}{೪} = ೦; ೮೮ + ೨೪ = ೨೨೨.$$

$$೧೫. \frac{೨೫}{೨} - \frac{೧೪}{೨} = \frac{೨೫+೨೨}{೨೨} + ೧\frac{೨}{೨೨}; ೨೪೨೨=೨೫(೨೨-೨೨)...$$

೩.

೬.೪. ಈಗ ದ್ವಿವರ್ಗ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಈ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉ. ೧. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{೫}{೨೨-೨೮} + \frac{೨}{೪೨+೮} = ೧\frac{೨}{೨೨} \dots \dots \dots (೧)$$

$$\frac{೮}{೨೨-೨೮} - \frac{೫}{೪೨+೮} = ೧\frac{೨}{೨೨} \dots \dots \dots (೨)$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು $\frac{೨}{೨೨-೨೮}$ ಮತ್ತು $\frac{೨}{೪೨+೮}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ತರುವಾಯ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ $\frac{೨}{೨೨}$ ಮತ್ತು $\frac{೮}{೪೨}$ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವದು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ,

$$(೧) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೫ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೨೫}{೨೨-೨೮} + \frac{೧೦}{೪೨+೮} = ೨\frac{೧೦}{೨೨}$$

$$(೨) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{೨೪}{೨೨-೨೮} - \frac{೧೦}{೪೨+೮} = ೨\frac{೨}{೨೨}$$

$$\text{ಬೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ } \frac{೨೪}{೨೨-೨೮} = ೧೨\frac{೨}{೨೨} = ೧೨\frac{೨}{೨೨}.$$

$$\therefore ೩ಯ - ೨ರ = ೪ \quad (೩)$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ೩ಯ - ೨ರ = ೪ ಎಂದು ಇಡಲಾಗಿ,

$$\frac{೫}{೪} + \frac{೩}{೪ಯ + ೨ರ} = ೧\frac{೨}{೩}$$

$$\therefore \frac{೩}{೪ಯ + ೨ರ} = ೧\frac{೨}{೩} - ೧\frac{೨}{೩} = ೨$$

$$\therefore ೪ಯ + ೨ರ = ೯. \quad (೪)$$

(೪) ನೆಯದನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ೮ಯ + ೪ರ = ೧೮ (೫)

(೩) ಮತ್ತು (೫) ಇವುಗಳ ಜೇರಿಃ ೩ಯ - ೨ರ = ೪

ಜನ್ನು ಮಾಡಿ

$$೮ಯ + ೪ರ = ೧೮$$

$$\frac{೧೧ಯ}{೧೧ಯ} = ೨೨, ೨೦.ಯ = ೨.$$

(೩) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ೪ಯ = ೨ ಇಡಲಾಗಿ ೬ - ೨ರ = ೪

$$\therefore - ೨ರ = ೪ - ೬ = - ೨ \text{ ಆಂ. } ೨ರ = ೧.$$

$$೪ಯ = ೨; ೨ರ = ೧.$$

ಉ. ೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\frac{೪}{೩ಯ - ೪ರ} - \frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ} = ೧\frac{೨}{೩} \quad \dots \dots \dots (೧)$$

$$\frac{೮}{೯ಯ - ೧೨ರ} + \frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ} = ೨\frac{೨}{೩} \quad \dots \dots \dots (೨)$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ ಅದನ್ನು

$$\frac{೮}{೩(೩ಯ - ೪ರ)} + \frac{೧}{೨(೨ಯ + ೫ರ)} = ೨\frac{೨}{೩} \text{ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು}$$

ದೊಬ್ಬರು ಕೂಡು ಬರುವುದು, ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ೧೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

$$\frac{೪೦}{೩ಯ - ೪ರ} + \frac{೩}{೨ಯ + ೫ರ} = ೨೨ \quad (೩) \text{ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುವುದು.}$$

ಈಗ $\frac{೧}{೩ಯ - ೪ರ}$ ಮತ್ತು $\frac{೧}{೨ಯ + ೫ರ}$ ಗಳಿಗಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆ

ದ್ವಿ. ಎ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೩

ಮತ್ತು ಕ ಈ ಅಕ್ಷೇಶಗಳನ್ನಿಟ್ಟರೆ, (೧) ಮತ್ತು (೩) ಗಳ ಮೇಲಿಂದ

$$೪೨ - ಕ = \frac{೧}{೧೦} \quad (೪)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೪೦೨ + ೩ಕ = ೨ \quad (೫)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

$$(೪) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೩ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, } ೧೨೬ - ೩ಕ = \frac{೩}{೧೦}$$

$$\text{ಜೇರ್ಲಿನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, } ೫೨೨ = \frac{೩}{೧೦} = \frac{೫೨೨}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦}.$$

$$(೪) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦} \text{ ಎಂದು}$$

$$\text{ಇಡಲಾಗಿ, } \frac{೧}{೧೦} - ಕ = \frac{೧}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ಕ = \frac{೧}{೧೦} - \frac{೧}{೧೦} = - \frac{೧}{೧೦} = - \frac{೧}{೧೦}.$$

$$\text{ಈಗ } ೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦} \quad \frac{೧}{೧೦} - ೪೨ = \frac{೫೨೨}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ೨ಯ = ೪೨ = ೨೦ \quad (೬)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ಕ = - \frac{೧}{೧೦} \quad \frac{೧}{೧೦} - ೪೨ = - \frac{೧}{೧೦}, \text{ ಅಂ. } ೨ಯ + ೪೨ = - ೨ \dots (೭)$$

$$(೬) \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, } ೨ಯ + ೧೪೨ = - ೨$$

$$(೭) \text{ ನೆಯದನ್ನು } ೨ \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, } ೨ಯ - ೪೨ = ೪೦$$

$$\text{ವಜಾಪಾಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, } ೨೪೨ = ೪೦$$

$$\text{ಅಂ. } ೨ = - ೨.$$

$$(೭) \text{ ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ೨ = - ೨ \text{ ಎಂದು ಇಡಲಾಗಿ,}$$

$$೨ಯ - ೧೦ = - ೨, \text{ ಅಂ. } ೨ಯ = ೮. \text{ ಅಂ. } ೨ಯ = ೮.$$

$$೨ಯ = ೮; ೨ = - ೨.$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(೧) \frac{೫}{೨-೩} + \frac{೩}{೨+೩} = \frac{೫}{೩}; \frac{೩}{೨-೩} - \frac{೩}{೨+೩} = ೦.$$

$$(೨) \frac{೮}{೨-೩} + \frac{೩}{೨+೩} = \frac{೩}{೧೦}; \frac{೮}{೨-೩} - \frac{೩}{೨+೩} = \frac{೧೨}{೧೦}$$

$$(೩) \frac{೨}{೫+೩} - \frac{೩}{೫-೩} + \frac{೧}{೨೦} = ೦;$$

$$\frac{೨}{ಪ+ಬ} - \frac{೮}{ಪ-ಬ} + ೩\frac{೪}{೫} = ೦.$$

$$(೪) \frac{೨}{೫(ಯ+ರ)} - \frac{೩}{೨(ಯ-ರ)} + ೧\frac{೧೧}{೨೦} = ೦;$$

$$\frac{೨}{೨(ಯ+ರ)} + \frac{೩}{೫(ಯ-ರ)} = \frac{೩೭}{೪೫}.$$

$$(೫) \frac{೧}{೨(ರ-ವ)} + \frac{೨}{೯(ರ+ವ)} + \frac{೧೧}{೯೦} = ೦;$$

$$\frac{೩}{೯(ರ-ವ)} - \frac{೨}{೫(ರ+ವ)} = \frac{೧೯}{೪೦}.$$

$$(೬) \frac{೮}{೨(ಯ-ವ)} + \frac{೯}{೨(ಯ+ವ)} = ೨\frac{೧}{೧೨}; \quad \frac{೫(ಯ+ವ)}{೨(ಯ-ವ)} = ೭\frac{೧}{೨}.$$

$$(೭) \frac{೩}{೪(ರ+ಸ)} - \frac{೨}{೫(ರ-ಸ)} + \frac{೩}{೨೦} = ೦:$$

$$\frac{೪ರ-೪ಸ}{೭ರ+೭ಸ} = \frac{೮}{೪೨}.$$

$$(೮) \frac{೧}{೧-ಪ+ಮ} + \frac{೧}{೧-ಪ-ಮ} = ೧;$$

$$\frac{೨}{ಪ-ಮ-೧} + \frac{೩}{ಪ+ಮ-೧} = ೧.$$

$$(೯) \frac{೫}{೪ಯ-೩ವ} + \frac{೭}{೩ಯ+೨ವ} = ೧\frac{೧}{೨};$$

$$\frac{೪ಯ-೩ವ}{೩ಯ+೨ವ} = ೧\frac{೩}{೭}.$$

$$(೧೦) \frac{೮}{೨ಕ-೫ನ} + \frac{೩}{೪ಕ-೫ನ} = ೨\frac{೧೩}{೧೫};$$

$$\frac{೨ಕ-೫ನ}{೪ಕ-೫ನ} = ೧\frac{೩}{೫}.$$

$$(೧೧) \frac{೨೫}{೮+೬} + \frac{೮}{೭೮+೩೬} = \frac{೬೩}{೨೦};$$

$$\frac{೫}{೭೮+೩೬} - \frac{೩}{೮+೬} + \frac{೧}{೨} = ೦.$$

$$(೧೨) \frac{೪}{೨೮+೩೨-೫} + \frac{೩}{೩೮-೧೨+೨} + \frac{೧}{೬} = ೦;$$

$$\frac{೫}{೨೮+೩೨-೫} - \frac{೨}{೩೮-೧೨+೨} + \frac{೧}{೬} = ೦.$$

೪.

೬.೫. ಉ. ೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯ ನಾಲ್ಕಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಎಕಂ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೨ರಿಂದ ಕಡಿದು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅದಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು?

ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ೫ ಮತ್ತು ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯದು ೫ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦೫+೫. ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕಡಿಸಿ ಎಕಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಕಡಿದು ಮಾಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦೫+೫=೨, ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೦ ೫+೫. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ೪೦೫+೫=೨ (೧೦೫+೫)

$$\therefore ೪೦೫+೫=೨(೧೦೫+೫).$$

$$\therefore ೧೦೫+೫=೨$$

$$೨ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ೫-೫=೧ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧೦೫+೫=೨(೧೦೫+೫)+೫$$

$$\therefore ೧೦೫+೫=೨೦೫+೫+೫$$

$$\therefore - 3\text{ಪ} + 2\text{ಮ} = 3 \dots (2)$$

(೧) ನೆಯವನ್ನು ೭ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $3\text{ಪ} - 2\text{ಮ} = ೭$

ಪೇರೀಜನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿ, $೭\text{ಪ} = ೧೩$, ಅಂ. ಪ = ೨.

(೧)ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ=೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ, $೧೦ - \text{ಮ} = ೧$, ಅಂ. ಮ = ೯.

$\therefore ೨೯$ ಇದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು.

ಉ.೨. ೩೦ ಸೇರು ಮತ್ತು ೨೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಇರುವ ಎರಡು ಪಾತ್ರೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೇರಿನಂತೆ ನೀರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನಂತರ ಆ ಪಾತ್ರೆಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ಹೊರಗೆ ತೆಗೆದು ತಿರುಗಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೧೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೪ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು ?

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೪೦ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ೩೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧೦ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು, ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧ ಕ್ಕಿ ನೀರು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೩೦ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ೨೦ ಸೇರು ಹಾಲು ಇದ್ದು ೧೦ ಸೇರು ನೀರು ಇರುವದು. ಅಂದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ಹಾಲು ಇದ್ದು ೧ ಕ್ಕಿ ನೀರು ಇರುವದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿಯ ಪ ಸೇರು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ದ ಸೇರು ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ ಸೇರಿನಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ಪ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧ ಕ್ಕಿ ಪ ಸೇರು ನೀರು, ಮತ್ತು ದ ಸೇರಿನಲ್ಲಿ ೩ ಕ್ಕಿ ದ ಸೇರು ಹಾಲು ಮತ್ತು ೧ ಕ್ಕಿ ದ ಸೇರು ನೀರು, ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ

$$೩\text{ಪ} + ೩\text{ದ} = ೧೦ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } ೧\text{ಪ} + ೧\text{ದ} = ೪ \dots \dots \dots (೨)$$

(೨) ನೆಯವನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $೩\text{ಪ} + ೨\text{ದ} = ೮ \dots (3)$

(೧) ನೆಯವೊಳಗಿಂದ (೩) ನೆಯವನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ,

$$೧\text{ಪ} = ೨, \text{ ಅಂ. ಪ} = ೨.$$

(೨) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಪ = ೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ,

$$೨ + ೧\text{ದ} = ೪, \text{ ಅಂ. ೧ದ} = ೨, \text{ ಅಂ. ದ} = ೨.$$

೨ ಸೇರು; ೨ ಸೇರು.

12) ದ್ವಿ. ಏ. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ೧೭೭

ಉ ೩. ಒಂದು ಡೋಣಿಗೆ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೮ ಮೈಲು-
ಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೪ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಲು
ಆರು ತಾಸುಗಳು, ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೩೫ ಮೈಲುಗಳನ್ನು
ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ೩೩ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಬರಲು ೮ ತಾಸುಗಳು
ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ; ಆದರೆ ಡೋಣಿಯ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ತಾಸಿನ
ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

ತಾಸಿಗೆ ಡೋಣಿಯ ಸ್ವಂತ ವೇಗವು x ಮೈಲುಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ
ವೇಗವು y ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಡೋಣಿಯು ತಾಸಿನಲ್ಲಿ
 $x+y$ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ $x-y$ ಮೈಲು
ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವದು.

$$\therefore \frac{28}{x+y} + \frac{24}{x-y} = 6 \dots (1)$$

$$\text{ಮತ್ತು} \quad \frac{35}{x+y} + \frac{33}{x-y} = 8 \dots (2)$$

$$\text{೨ನೆಯದನ್ನು ೪ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,} \quad \frac{140}{x+y} + \frac{132}{x-y} = 32$$

$$\text{ಮತ್ತು (1) ನೆಯದನ್ನು} \quad \frac{100}{x+y} + \frac{120}{x-y} = 20$$

$$\text{೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ} \quad \frac{500}{x+y} + \frac{600}{x-y} = 100$$

$$\text{ಎಣಿಸಿದಾಗ} \quad \frac{500}{x+y} + \frac{600}{x-y} = 100 \dots (3)$$

(1)ನೆಯದಲ್ಲಿ $x-y = 6$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,

$$\frac{28}{x+y} + 4 = 6, \quad \text{ಅಂದರೆ} \quad \frac{28}{x+y} = 2,$$

$$\text{ಅಂದರೆ} \quad x+y = 14 \dots \dots \dots (4)$$

(೨) ಮತ್ತು (೪) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, $2x = 20$,

$$\text{ಅಂದರೆ} \quad x = 10. \text{ ಮತ್ತು } x+y = 14 \text{ ಇದ್ದುದರಿಂದ } y = 4.$$

ಡೋಣಿಯ ವೇಗವು 10 ಮೈಲು; ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗವು 4 ಮೈಲು.

ಉ.೪. ೩೬ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಊರಿಗೆ ಹೊರಟು ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ೨೭ ಮೈಲಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ಕಾಲಿನಿಂದ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕಾವರಿ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಬಸ್ಸಿನ ವೇಗವು ಅವರ ಮೊದಲಿನ ವೇಗದ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವನು ತಾನು ಕಾಲಿನಿಂದ ನಡೆದ ಅಂತರವನ್ನು ಕಾಲಿನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟು ವೇಗದಿಂದ ನಡೆದಿದ್ದರೆ ಆ ತಾ. ೨ ಮೈ. ಗಳಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದನು, ಆದರೆ ಬಸ್ಸಿನ ಮತ್ತು ಅವನು ನಡೆಯುವ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

ಬಸ್ಸಿನ ತಾಸಿನ ವೇಗವು ಬ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಕಾಲಿನಿಂದ ನಡೆಯುವವನು ಸ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವಂತೆ

$$\frac{36}{b} + \frac{r}{s} = \frac{27}{3}, \quad r \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, } \frac{3}{b} + \frac{1}{s} = 3 \dots (1)$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{\frac{36}{b}}{2} + \frac{\frac{r}{s}}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\therefore \frac{36 \times 3}{2b} + \frac{r \times 3}{2s} = \frac{27}{2}$$

$$36 \text{ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, } \frac{3}{b} + \frac{1}{s} = 3$$

$$30 \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ } \frac{30}{b} + \frac{30}{s} = 90 \dots (2)$$

$$(1) \text{ ನೆಯದನ್ನು } 3 \text{ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ } \frac{90}{b} + \frac{30}{s} = 90 \dots (3)$$

(2) ನೆಯದೊಳಗಿಂದ (3) ನೆಯದನ್ನು ಕಳೆವೆ

$$\frac{r}{b} = 3, \text{ ಅಂ. } b = 08.$$

(೧) ನೆಯದರಲ್ಲಿ ಬ = ೧೨ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ,

$$ಗಿ + \frac{೧}{೨} = ೩, \text{ ಆಂ. } \frac{೧}{೨} = ೩ - ೨ = ೧, \text{ ಆಂ. } ೨ = ೨.$$

ಬದ್ಧನ ವೇಗವು ೧೨ ಮೈಲು; ನಡೆಯುವ ವೇಗವು ೨ ಮೈಲು.

ಉ. ೫. ಒಂದು ಧಾರ್ಮಿಕ ಸಮಾರಂಭದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೆರೆದ ವೈದಿಕರಿಗೆ ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ದಕ್ಷಿಣೆ ಎಂದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಅವರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೬೦ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಕಡಿದು, ಮತ್ತು ೪೦ ಕಡಿದು ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ವೈದಿಕರು ಎಷ್ಟಿದ್ದರು? ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಕ್ಷಿಣೆಯು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ವೈದಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವ ಇದ್ದು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ದಕ್ಷಿಣೆಯು ಸಿಕ್ಕಿದ್ದರೆ ವದ ರೂ. ದಕ್ಷಿಣೆಯನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತೆಂಬ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ,

$$(ವ + ೬೦)(೫) = ೫ವ \dots \dots \dots (೧)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (ವ - ೪೦)(೫) = ೫ವ \dots \dots \dots (೨)$$

$$\text{ಒಂದನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ } ೫ವ + ೩೦೦ - ೫ವ - ೨೦೦ = ೫ವ.$$

$$\therefore ೩೦೦ - ೫ವ = ೨೦೦ \dots \dots \dots (೩)$$

$$\text{ಮತ್ತು } (೨) \text{ ನೆಯದರ ಮೇಲಿಂದ } ೫ವ - ೨೦೦ + ೫ವ - ೨೦೦ = ೫ವ$$

$$\therefore - ೪೦೦ + ೫ವ = ೨೦೦ \dots \dots \dots (೪)$$

$$(೩) \text{ ಮತ್ತು } (೪) \text{ ಕೂಡಿಸಿದರೆ } ೨೦೦ = ೫೦೦, \text{ ಆಂ, } ೫ = ೨೫.$$

$$\text{೪ನೆಯದರಲ್ಲಿ } ೫ = ೨೫ \text{ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,}$$

$$೨೫ - ೧೦೦೦ + ೫ವ = ೨೦೦, \text{ ಆಂ. } ೫ವ = ೧೨೦೦, \text{ ಆಂ. } ೫ = ೨೪೦.$$

$$\text{ವೈದಿಕರು, ೨೪೦; ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ದಕ್ಷಿಣೆಯು ೫ ರೂ.}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೫

೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೭ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅಂಕಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ

ಸುಬೋಧ ಬೀಜಗಣಿತ

ಜೇರ್ವೀಜು ಆ ವೃತ್ತಸ್ತುಮಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಅರು ಪಟ್ಟಿ ಇರುತ್ತದೆ, ಅದರಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨. ಬಾಳವ್ಯನಾಯಿಕರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವಷ್ಟು ಒಡ್ಡಿ ದರದ ಸರಕಾರಿ ಸಾಲಿನ ತೇವಪತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ೪% ದರದ ಮುನಿಸಿಪಾಲಟಿಯ ಸಾಲಿನ ತೇವಪತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದರಲ್ಲಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಅವರಿಗೆ ಪ್ರತಿಸರ್ವಕ್ಕೆ ೨೦೦೦ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಮಾಡಬೇ ಅವರು ತಮ್ಮ ಹಣವನ್ನು ಎರಡೂ ತೇವಪತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದ್ದರೆ, ಅವರ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿಯ ಉತ್ಪನ್ನವು ೯೦ ರೂ. ಗಳಿರುವ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅದರಿ ಅವರ ಏಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು, ಮತ್ತು ಅವರು ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟಿಟ್ಟಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ೩ ರೂ. ಗೆ ಒಂದರಂತೆ ೨೦೦ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕಾಣೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನೋಗಿನದವುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದನು, ಮತ್ತು ಆ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೨೦ ರಂತೆ ಲಾಭವಾಯಿತು. ಅವನು ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನೋಳಿಗಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೪ ಅ. ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದ್ದನೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ೪ ಅ. ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾರಿದ್ದರೆ, ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಆದ ಲಾಭಕ್ಕಿಂತ ೧೦ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಲಾಭವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅವರಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಸಿಗಳಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಯಾವ ಭಾವದಿಂದ ಮಾರಿದನೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೪. ರಾಮರಾಯರು ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಗಾಡಿಯನ್ನು ಕೆಲವು ಹಣಕ್ಕೆ ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು. ಕುದುರೆಗೆ ನೂ. ೧೫ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಗಾಡಿಗೆ ನೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ೧೦೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಹಣವು ಖರ್ಚು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಆದರೆ ಕುದುರೆಯು ನೂ. ೧೦ ರಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಜಿಲಿಗೆ ಮತ್ತು ಗಾಡಿಯು ನೂ. ೧೫ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚು ಜಿಲಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದರೆ, ಒಬ್ಬ ಹಣದಲ್ಲಿ ಯಾವವೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತಿದ್ದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕುದುರೆ ಮತ್ತು ಗಾಡಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಜಿಲಿ ಎಷ್ಟು ?

೫. ಒಂದು ಡೋಣಿಗೆ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೨೦ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಹಿಂಸೆ ಬರಲು ೮ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ೨೪ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಹೋಗಿ ತಿರುಗಿ ಅಂತ್ಯೇ ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಬರಲು ೬ ತಾಸುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿವೆ. ಆದರೆ ಡೋಣಿ, ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟು ?

೬. ಭೀಮಪ್ಪ ಬಡಗನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ೫೬ ರೂ. ಗಳಿಸುತ್ತಾನೋ ಅಷ್ಟೇ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ರಾಮಪ್ಪ ಗಮಾಡಿಯು ೪೦ ರೂ. ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ೬೫ ರೂ. ಗಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಭೀಮಪ್ಪನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗಿಂತ ಎರಡು ಹೆಚ್ಚು ದಿನಗಳು ರಾಮಪ್ಪನಿಗೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವರ ದಿನಗೂಲಿಯ ದರವೆಷ್ಟು ?

೭. ಮೂರು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದ್ದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೯೯ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು ತಿರುವುಮುರುವಾಗುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಶತಂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ೨ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ದಹಂ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ೪ ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಯಾವದು ?

೮. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ಕೆಲವು ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಪೇಟೆಗೆ ಹೋದನು. ಅಲ್ಲಿ ದರವು ಸೇರಿಗೆ ಒಂದು ಅಣೆಯಂತೆ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಇಳಿದ ಮೂಲಕ ಅವನಿಗೆ ೮ ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕಿತು. ದರವು ಒಂದು ಅಣೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೬ ಸೇರು ಸಕ್ಕರೆಯು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣದ ಸಕ್ಕರೆಯನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೯. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಸಭಾಗೃಹದ ಉದ್ದಳತೆಯು ೫ ಫೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ೨ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಿದ್ದರೆ ಅದರ ಪ್ರೇಕ್ಷಣೀಯ

೩೬೦ ಚೌ. ಫು. ಗಳಿಂದ, ಮತ್ತು ಉದ್ದಳತೆಯು ೫ ಫೂಟು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದು ಅಗಲಳತೆಯು ೫ ಫೂಟು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ೧೭೫ ಚೌ. ಫೂ. ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ ?

೧೦. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ೧೦ನೇ ಇಯತ್ರೆಡುಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರನ್ನು ಎರಡನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಮೊದಲನೆಯವರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯವರ ಕ್ಷಿ ರಷ್ಟು ಹುಡುಗರಾಗುವವು, ಆದರೆ ಎರಡನೆಯವರಲ್ಲಿಯ ೨ ಹುಡುಗರನ್ನು ಮೊದಲನೆಯವರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ಎರಡನೆಯವರಲ್ಲಿಯೂ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವವು, ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹುಡುಗರಿರುವರು ?

೧೧. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಜೋರಿಸಿನ ಅನುಪಾತವು ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ಅಗುಮ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಜೋರಿಸಿನ ಐದು ಪಟ್ಟು ಅಗುವದಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೧೨. ಮಾವಿನಹೆಣ್ಣಿನ ದರವು ಡರ್ಮನ್ನಿಗೆ ೮೮. ಇಳಿದ ಮೂಲಕ ಹೋದವಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೆಣ್ಣು ಸಿಕ್ಕಿದ ಹೆಣ್ಣುಗಳು ಅವರ ಹಿಂದಿನವಾರದಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಹೆಣ್ಣುಗಳಿಗಿಂತ ೩ ಡರ್ಮನ್ನಿನ ಹೆಣ್ಣುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕವು, ಮತ್ತು ಈ ವಾರದಲ್ಲಿ ದರವು ಮತ್ತೂ ೮೮. ಇಳಿದದ್ದರಿಂದ ಅಷ್ಟೇ ಹೆಣ್ಣಿನಲ್ಲಿ ಹೋದವಾರದಿಗಿಂತ ಒಂದು ಡರ್ಮನ್ನಿನ ಹೆಣ್ಣುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕವು ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ವಾರದಲ್ಲಿ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹೆಣ್ಣು ಮಾವಿನಹೆಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು, ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ಒಬ್ಬ ಹೆಣ್ಣು ಮಾರುವವನ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮೋಸಂಬೀ ಹೆಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗಿಂತ ೮ ಹೆಚ್ಚು ಕಿತ್ತಳೆ ಹೆಣ್ಣುಗಳಿದ್ದವು. ಅವನು ಮೋಸಂಬೀ ಹೆಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹೆಣ್ಣುಗಳಿಗಿಂತ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೩ ಅಣೆ ಹೆಚ್ಚು ದರದಿಂದ ಮಾರುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಹೆಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದ ನಂತರ ಎರಡೂ ತರದ ಹೆಣ್ಣುಗಳ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಇದ್ದವು. ಅವನಿಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅವನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹೆಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮೋಸಂಬೀ ಹೆಣ್ಣುಗಳ ದರದಿಂದ ಮತ್ತು ಮೋಸಂಬೀಗಳನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಹೆಣ್ಣುಗಳ ದರದಿಂದ

ಮಾರಿದ್ದರೆ ಕತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಮೋಸಂಬಗಳ ಜಿಲ್ಲೆಗಿಂತ ೩ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಬರುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಎಷ್ಟಿದ್ದವು, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಯಾವ ದರದಿಂದ ಮಾರಿದವು?

೧೪. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅಣ್ಣಿಪ್ಪನ ವಯಸ್ಸು ವಸಂತನ ಆ ಸಮಯದ ವಯಸ್ಸಿನ ಮುಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದು, ಐದು ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಅವನ ಆ ಸಮಯದ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೫ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು. ಇದರಿಂದ ಅಪರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೫. ಗಂಡಹೆಂಡತಿಯರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿಯು ಇಂದು ಅವರ ಮಕ್ಕಳ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿಯ ಮುಮ್ಮಡಿ ಇದ್ದು ನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಕಾಲದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಾಲ್ಕುಡಿಯಿತ್ತು, ಮತ್ತು ೩ ವರ್ಷಗಳ ತರುವಾಯ ಅದು ಮಕ್ಕಳ ಆ ಕಾಲದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಜೋಡಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ೨ ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಮಕ್ಕಳೆಷ್ಟು?

೧೬. ರಾಮ, ವಿಠಲ, ಗೋವಿಂದ ಈ ಮೂವರೂ ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಗೆ ಹೊರಡುತ್ತಾರೆ, ಮತ್ತು ರಾಮನ ನಡಿಗೆಯ ಸರಾಸರಿ ವೇಗದಿಗಿಂತ ವಿಠಲನ ವೇಗವು ತಾನಿಗೆ ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಕಡಿಮೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನದು ಅರ್ಧ ಮೈಲು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದುದರಿಂದ ವಿಠಲನು ರಾಮನ ನಂತರ ೪೫ ಮಿ. ತಡಮಾಡಿ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ರಾಮನಿಗಿಂತ ೩೫ ಮಿ. ಮೊದಲು ಮುಟ್ಟುತ್ತಾನೆ; ಆದರೆ ಆ ಊರು ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು, ಮತ್ತು ಅವರ ನಡಿಗೆಯ ತಾಸಿನ ವೇಗವೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೭. ಒಬ್ಬ ಗಡಿಯಾರ ಮಾರುವವನು ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಸೂ. ೨೫ ಲಾಭದಂತೆ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಸೂ. ೧೫ ಲಾಭದಂತೆ, ಮೀಗೆ ಎರಡು ಗಡಿಯಾರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ೪೭೬ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಮೊದಲನೆಯ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಸೂ. ೧೫ ಲಾಭದಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ೧೦೦ ಕ್ಕೆ ೧೦ ಪಾನಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾರಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ

ಅಭಿವ್ಯಾ ಅಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ, ಇಲ್ಲವೆ ಹಾನಿಯಾದರೂ ಅಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಆ ಗಡಿಯಾರಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೂಲ ಜಲೆ ಎಷ್ಟು ?

೧೮. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನೇ ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಜೇಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒ ಕೂಡಿಸಿ ಬಂದ ಜೇರಿಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ೩ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಳ ಜೇರಿಜಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬ ಬರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೧೯. ಒಬ್ಬ ಬಣ್ಣಗಾರನು ಒಂದು ಬಣ್ಣದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಅದು ಕೆಲ-
ವಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯುವದೆಂದು ಅಂದಾಜಿನಿಂದ, ಕೆಲವು ರಕ್ತಸಿಗೆ
ಮಾಡಲು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡನು, ಆದರೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ೫ ದಿನಗಳು ಹೆಚ್ಚು
ಹತ್ತಿದ್ದರಿಂದ ಅವನಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದಗಿಂತ ವಿನಕ್ಕೆ ೧ ರೂ. ಕಡಮೆ ಸಿಕ್ಕಿತು.
ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದಗಿಂತ ೪ ದಿನಗಳು ಕಡಮೆ ಹತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ದಿನಕ್ಕೆ
೧೧ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ವಿನ-
ಗಳು ಬೇಕಾದವು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಸಿಕ್ಕಿತು ?

೨೦. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರದಿಂದ ಅಲಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ
ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೇರಿಜಿನಿಂದ ಅಲಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ
ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೩ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು
ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೇರಿಜಿನಿಂದ ೧೨೦ಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರದೊಳಗಿಂದ
ಅಂತರದಿಂದ ಅಲಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು
೩ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೨೧. ಒಂದು ವಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಲು ಮತ್ತು ನೀರು ೪ : ೧ ಈ
ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾತ್ರೆಯೊಳಗಿನ ೧೫ ಸ್ಕು
ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಹಾಲು
೨೨ ಸೇರು ಮತ್ತು ನೀರು ೭ ಸೇರು ಅಗುವದು ?

೨೨. ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅವುಗಳ ಜೇರಿಜಿನಿಂದ
ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರವು ೪ ಬಂದು ಶೇಷವು ೩ ಉಳಿಯುವದು. ಮತ್ತು
ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ೩೬ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಳಗಿನ ಅಂಕಗಳ ಕದಲು-
ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೩. ಕೆಲವಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷದೊಳಗಿನ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಎರಡನೆಯ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂಡ ಹಣದಿ ಪತ್ತೆಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೪ ಅಣೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ೩ ಹೆಚ್ಚು ರವರೆ ೨ ಅಣೆಗಳು ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತು, ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರು ?

೨೪. ಒಂದು ಅಸ್ತೋರ್ಧಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅಂರಕ್ಕೆ ಭೇದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಭೇದವೊಳಗಿಂದ ಅಂರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಹೊಸ ಅಸ್ತೋರ್ಧಾಂಕದ ಬೆಲೆಯು ೧೯ ಅಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅಂರ ಹಾಗೂ ಭೇದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ೨ ಕಳೆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಅಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಅಸ್ತೋರ್ಧಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

೨೫. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರವ್ಯಸನು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ೨೦ ರತ್ನಲು ಚಹದಲ್ಲಿ ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಚಹವನ್ನೂ ಮತ್ತು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವನ್ನು ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ೩ ಮಿಶ್ರಣವನ್ನು ೨ ರೂ. ೩ ಅ.ಗೆ ರತ್ನಲಿನಂತೆ ಮಾರಿ ೧೦ ರೂ. ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದನು. ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ಮತ್ತು ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ೨ ರೂ. ದರದ ಚಹವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಲಾಭವು ಒಂದು ರೂ. ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಮಿಶ್ರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪ್ರಕಾರದ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಚಹವಿತ್ತು ?

೨೬. ಎರಡು ಅಂಕಗಳಿಗಾಗಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂಕಗಳ ಬೇರೊಂದನ ನಾಲ್ಕುಡಿಯಿದ್ದು ಗುಣಾಕಾರದ ಮುಪ್ಪುಡಿಯಿರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೭. ರಾಮರಾಯರು ತಮ್ಮಲ್ಲಿಯ ಹಣದಲ್ಲಿಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕೃಷ್ಣ ರಾಯರಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ಕೃಷ್ಣ ರಾಯರು ಏಳೆಯಲ್ಲಿ ೧೨೫ ರೂ. ಗಳು ಆಗುವವು,

ಕೊಟ್ಟರೆ ರಾಮರಾಯರು ಹತ್ತರ ೧೨೫ ರೂ. ಆಗುವವು. ೩ ರೂ. ಎಷ್ಟು ಹಣವಿತ್ತು ?

೨೮. ಎರಡು ಲೂರುಗಳ ಸಮನಿಸ ಅಂತರವು ೧೦ ಸೈಲು ಇವು. ಅವರಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ದಾರಿಯು ಸಪಾಟಾಗಿ, ಕೆಲವನ್ನು ಪರಿಕೆಯದು ಮತ್ತು

ಕೆಲವಷ್ಟು ಇಳುಕಲಿದಿರುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಹೋಗುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆ ಅಂತರವನ್ನು ೪ ತಾಸು ೪೦ ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ ೧೫ ಮಿ. ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅವನ ಏರಿಕೆಯ ಮೇಲಿನ, ಸವಾಟ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಇಳುಕಲಿನಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಸರಾಸರಿ ತಾಸಿನ ವೇಗವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೨ಮೈ; ೩ಮೈ; ಮತ್ತು ೪ ಮೈಲು. ಇದ್ದರೆ, ವಾರಿಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವು ಸವಾಟವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೨೯. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ತನ್ನ ಮನೆಯಿಂದ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲಿನಂತೆ ನಡೆದು ನೆಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಊರಿಗೆ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಹೋದನು. ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ತಾಸಿದ್ದು ತಿರುಗಿ ಮನೆಗೆ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನೊಡಲು ಕೆಲವಷ್ಟು ಅಂತರವನ್ನು ಸಾಯಕಲ್ ಮೇಲಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಮತ್ತು ಬೀದಿಯನ್ನು ನೊಡಲಿನಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಬಂದನು. ಮನೆಗೆ ಬಂದ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ ೯ ಹೊಡೆದು ೨೪ ಮಿ. ಗಳಾದದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿತು, ಅವನ ನಡೆಯುವ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲು ಮತ್ತು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ವೇಗವು ೮ ಮೈಲು ಇದ್ದರೆ ಅವನು ೧೦ ಹೊಡೆದು ೪೦ ಮಿ. ಗಳಲ್ಲಿ ಮನೆಗೆ ತಿರುಗಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಅವನ ಮನೆಯಿಂದ ಆ ಊರಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

೩೦. ಬಲಗಡೆಯ ಅಂಕೆಯು ಶೂನ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕ-ಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿಯ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು ನಡುವಿನ ಅಂಕಿ ಇವುಗಳ ಅಡಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೧೮೦ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಎಡಬದಿಯ ಅಂಕಿಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಮಾಡಿ ನಡುವಿನ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯ ಅಂಕಿ ಇವುಗಳ ಅಡಲುಬದಲನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೫೪ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

೩೧. ವಿಧಿ ಮಂಡಲವ ಜುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತದಾರ ಸಂಘದ ಒಂದು ಜಾಗೆಗಾಗಿ ಇಬ್ಬರು ಉಮೇದವಾರರು ನಿಂತಿದ್ದರು. ಆರಿಸಿ ಒಂದ ಉಮೇದವಾರನಿಗೆ ದೊರೆತ ಮತಗಳಲ್ಲಿ ೨೪೦೦ ಮತಗಳು ಎರಡನೇ ಉಮೇದವಾರನಿಗೆ ಬಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಎರಡನೇ ಉಮೇದವಾರನು ೧೯೨ ಮತಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಪಡೆದು ಆರಿಸಿ ಬರುತ್ತಿದ್ದನು, ಮತ್ತು ಅವನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಮತದಾನದಲ್ಲಿಯೂ ೧೬

ಮತಗಳು ಆಗ ದೊರೆತ ಮತಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ದೊರೆತಿಲ್ಲದೆ, ಇಬ್ಬರಿಗೂ ಸಮಾನ ಮತಗಳು ದೊರೆತಿಲ್ಲವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಮತಗಳು ದೊರೆತವು ?

೨೨. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದ ಇವೆರಡೂ ೨ ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾದಿದ್ದರೆ ಅವರ ಪರಿಮಾ ೩ ಆಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೧ ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ೨ ಆಗುತ್ತದೆ, ಅವರ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

೨೩. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೬ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವರೊಳಗಿಂದ ೨ ಕಳೆದರೆ ಅವರ ಅಂಕಗಳೆ ಅವರು ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ. ಅವರ ಅ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

೨೪. ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು ೩ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅವರು ಬದಲಿಸಿ ಅವಕ್ಕೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ೨ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಯಾವುದು ?

ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳಂತೆಯೇ ಮೂರು ಇಲ್ಲವೆ ಹೆಚ್ಚು ವರ್ಣಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ದಿವಿಸಿ ಅಸ್ಯಕ್ತಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಅವರ ಶಿಕ್ಷಣ ಬಾತೆಯು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟ ಇಲ್ಲವೆ ಎಸ್. ಎಸ್. ಸಿ, ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಂಡಲವು ಸೇರಿಸಿದ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಾಪರಣವನ್ನು ಮಾಡಿಲ್ಲ. ಆದಕಾರೂ ಅವುಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇಲ್ಲ ಮಾಡಿಲ್ಲ.

ಏಳನೆಯ ಪ್ರಕರಣ

ಅಲೇಖ

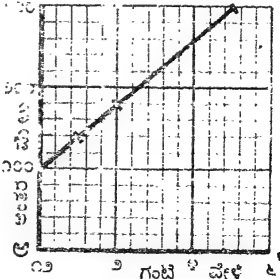
೧.

೩೧. ಹಿಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಇಯತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿರಲು ಅಲೇಖದ (Graph) ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಜ್ಞಾನವು ನಮಗೆ ಆಗಿರುವದು. ಅರನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ, ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ಕಾಲೇ-
ಯಲ್ಲಿಯ ಉಪಸ್ಥಿತಿ, ಗುಣ, ಮೂಲೋದ್ದೋಗ, ಬೆಳೆಗಳು, ಜನ್ಮ ಮುಂತಾದ-
ವುಗಳಿಗೆ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು,
ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ವಸ್ತುಗಳ ವಾರದಲ್ಲಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ತಿಂಗಳಿನ ವರುಗಳು,
ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಅಲೇಖ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಮಂಡಿಸುವದಿಂಬುವದನ್ನು
ನಾವು ಕಲಿತೆವು. ಮುಂದೆ ಏಳನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ವೇಗವಾಗಿ
ಕಾಲೇಯಲ್ಲಿಯ ಹೆಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಹೆಡುಗರ ಎತ್ತರಕೆತ್ತೆ ಮತ್ತು ತೂಕ,
ಮೂಲೋದ್ದೋಗಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರಗತಿಯು, ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮುಂತಾ-
ದವುಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ
ತೆಗೆಯುವದಿಂಬುವದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಎಂಟನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ
ಇರಬೇಕಾದರೆ ಇಂಚು ಮತ್ತು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ, ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು
ಪೌಂಡುಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಡಾಲರುಗಳು. ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು
ತೋರಿಸುವ ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖ ವಿಷಯದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡೆವು.
ಹೊದವರನು ಒಂಬತ್ತನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಸದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ರೇಖಾ-
ಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ಓದುವದಿಂಬುವದನ್ನು ನಾವು
ನೋಡಿದೆವು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿಯೇ ಈಗ ನಾವು ಮುಂದಿನ ಮಾರ್ಗವನ್ನು
ಆಕ್ರಮಿಸೋಣ, ಮತ್ತು ಅಲೇಖದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಜ್ಞಾನವನ್ನು
ಗಳಿಸೋಣ.

೩೨. ನಮ್ಮ ಊರ ಹತ್ತರ ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯ ದಾರಿಯು
ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ ದಿನಾಲು ಕೆಳಗಿನ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ಬರುವ ಒಂದು ಉಗಿ-
ಬಂಡಿಯು ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಗೆ ಬಂದು

ಮೇಲ್ಕಂಡಿರುವ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಾಸ್ಥದಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಆ ಗಾಡಿಯು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಊರಿನಲ್ಲಿ-
ದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಡುವ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು
ಇದ್ದರೆ, ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಯಾವಾಗಾದರೂ, ಅದು
ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಎಂಬುದನ್ನು
ತಿಳಿದುಬಿಡಬೇಕೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿರಿ. ಇದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವು ಮುಂದೆ
ತೋರಿಸುವಂತೆ ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ತನಕವನ್ನು
ಅಕ್ಷ ಗೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಮತ್ತು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೈಲಿಗಳಲ್ಲಿರುವ
ಅಂತರವನ್ನು ಉದ್ದ ಗೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಸರಿಯಾಗಿ ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಗೆ
ಆ ಗಾಡಿಯು ೧೦೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ, ಒಂದು ಗಂಟೆಗೆ ೧೪೦
ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ೨ ಗಂಟೆಗೆ ೧೮೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರು-
ವದು, ಮತ್ತು ೫ ಗಂಟೆಗೆ ೨೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಎಂಬ ಸಂಗ-
ತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟು ನಾವು ಈ ಅಲೇಖವನ್ನು ತಿಳಿದುಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದರ
ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಗಾಡಿಯು ಎಲ್ಲಿರುವದು ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ
ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗೆ ಇರುವದುಂ-
ದನ್ನು ನಮಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

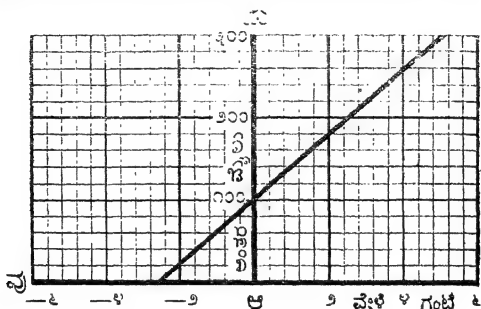
ಈ ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಯ
ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು
ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಲ್ಲಿರುವದು,
ನಮ್ಮ ಊರಿನ ಮೇಲಿಂದ ಅದು
ಯಾವಾಗ ಹೋಗುವದು ಮೊದ-
ಲಾದ ಸಂಗತಿಗಳು ಮೇಲಿನ
ಅಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ತಿಳಿದು
ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ
ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದು? ಇಲ್ಲಿ ಅವ-



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧.
ವೇಲಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.
ತೋರಿಸುವದಿಲ್ಲ. ಅವಕಾಶ.

ಈ ರೇಖೆಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ
ಅವರೆ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವದ ವೇಲಿಯನ್ನು

ಎನು ಮಾಡುವದು? ಧನ-ಫಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಹೇಗೆ ಬುಲಯೋಗವಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂಬಿ (ಭಾ. ೧. ಪ್ರ. ೬.) ಎಂಟನೇ ಇಯತ್ತಿಯಲ್ಲಿವತ್ತಾಗ್ಗೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆ ಇದು ಅರಂಭ-ಸ್ಥಾನವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಅವ ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಿದರೆ (ವೂ ದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಅದು ಬಲಬದಿಗೆ ಹೇಗೆ ನಾವು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಕರುನಾಯದ

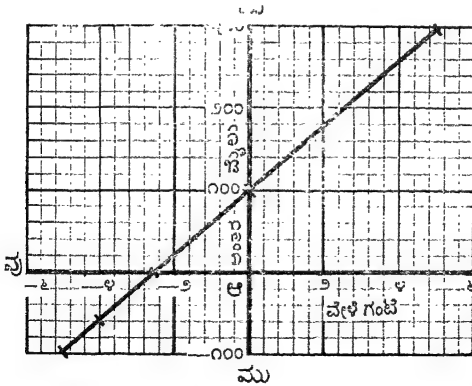


ಕ್ರ. ೨.

ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೋ ಅದರಂತೆಯೇ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಪೂರ್ವ-ದಲ್ಲಿಯೇ ವೇಳೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯದ ಸಂಕೇತಿನಂತೆ, ಎಡಬದಿಗೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಗಾಡಿಯು ೧ ತಾಸು ಮೊದಲು (೧೧ ಗಂಟೆಗೆ) ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೬೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ತಾಸುಗಳ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ (೧೦ ಗಂಟೆಗೆ) ೨೦ ಮೈಲಿನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವದು, ಮೊದಲಾದ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಅರ್ಥವು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಸ್ವರೂಪವು ಇರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಅರ್ಥವು ಮೇಲಿನದ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗಿಂತ ೨೧ ತಾಸು ಮೊದಲು ಅಂ. ೯೧ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬರುವದ್ದು ಕಂಪುಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಸಮಯದಿಂದ ಅದು ಯಾವಾಗ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಗಾಡಿಯು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೊತ್ತು ಮೊದಲೇ ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ ಹೊರಟಿದೆ. ಅದು ೯೧ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿತ್ತು. ಅದರ

ಈ ಮಾರ್ಗಕ್ರಮಣವು ಸಹ ನಮಗೆ ಅಲೇಖದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವದಿಷ್ಟರಿ ಏನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು? ಅನು ಈ ರೀತಿಯು ನಮ್ಮ ಅಲೇಖ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಂದಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಿಂದಿನ (ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯ) ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದಿಷ್ಟರಿ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅರೇಖೆಯನ್ನು ಬರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಮುಂದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಬೆಳೆಸಬೇಕಾಗುವದು, ಮತ್ತು ಅಂತರವು ಅದ ಮೇಲ್ಕಡೆಗಿರುವ ಅಂತರಗಳು ಹೇಗೆ ಭಸವಿರುವವು; ಅದರಂತೆ ಕೆಳಗಡೆಗಿರುವ ಅಂತರಗಳು ಉಣವಿರುವವು. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೮ ಗಂಟೆಗೆ (೪ ತಾಕು ಮೊವಲು) ಗಾಡಿಯು ಕೆಳಗಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೬೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ೭ ಗಂಟೆಗೆ (೫ ತಾಕು ಮೊವಲು) ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ನುಯ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಅಲೇಖವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗವನ್ನೂ ಸಹ ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೩.

ಗಾಡಿಯ ಮೂಲ ಹೊರತುವ ಸ್ಥಳವು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಕೆಳಗಡೆ ೧೦೦ ಮೈಲು ಇದ್ದು ಅದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಪ್ರತಿದಿನ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು

ಸಾಯಂಕಾಲ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಮಡಿಗೆ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದ ಮುಕ್ತಾಮದ ಊರಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಆ ಅಲೇಖ್ಯ ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಹೊರಟಾಗಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಮದ ಊರಿಗೆ ಮುಟ್ಟುವ ತನಕ ಅದರ ಪ್ರವಾಸದ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ಇಲ್ಲಿಗೆ ತರುಣಾಯವಾಗಲಿ ಯಾವಾಗ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಅಲೇಖ್ಯದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ವ್ರಾತ ಮತ್ತು ಮುಅಮ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಅಲೇಖ್ಯವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಅಲೇಖ್ಯ ಮೂರನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಅದು ಎರಡನೇ ಭಾಗ-ದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಮೊದಲನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಮೊದಲು ಇಲ್ಲಿಗೆ ತರುಣಾಯ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಯಾವಾಗ್ಗೆ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳುವ ಸೂತ್ರವನ್ನಾದರೂ ನಮಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು. ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುಣಾಯದಕಾಲ (ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ) ವ ಈ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಮದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವನ್ನು (ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ) ಮು ಈ ಸ್ಥಳದಿಂದ ತೋರಿಸಿದರೆ, ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಮದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೧೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದರ ಸೂಸರಿ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ಇರುವುದರಿಂದ ಮು: ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಈ ಸೂತ್ರವು ಗಾಡಿಯು ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಗಾಡಿಯು ಬಂದಾಗ ಮ = ೦, ಅದುದರಿಂದ ೧೦೦ + ೪೦ ವ = ೦, ಅಂ. ೪೦ ವ = -೧೦೦ ಅಂ. ವ = -೨೫ ಅಂ. ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ೨೫ ತಾಸು ಮೊದಲು ಅಂ. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೯೫ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮ ಊರಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಗಾಡಿಯು ಮೂಲ ಹೊರಡುವ ಸ್ಥಳವು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ -೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ, ಅದುದರಿಂದ ಗಾಡಿಯು ಹೊರಡುವ ಸಮಯದಲಿ

ಮ = ೧೦೦, ಆದುದರಿಂದ—೧೦೦ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ, ಅಂ. ೪೦ವ = —೨೦೦, ಅಂ. ವ = —೫.

∴ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ನೋಡಲು ೫ ತಾಸು, ಅಂ. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೭ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಡುತ್ತದೆ.

ಅದರಂತೆಯೇ ಗಾಡಿಯ ಕೊನೆಯ ಮುಕ್ತಾಮದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುವಾಗ ಮ = ೨೦೦, ∴ ೨೦೦ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ, ಅಂ. ೪೦ ವ = ೨೦೦, ಅಂ. ವ = ೫
∴ ಗಾಡಿಯು ಸಾಯಂಕಾಲ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಮುಕ್ತಾಮದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ.

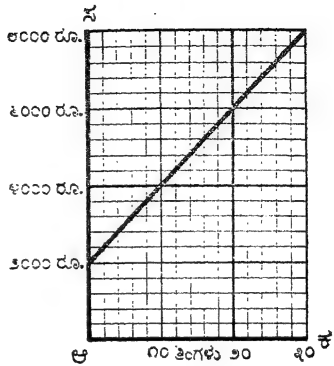
ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಿರುವ ಸಂಗತಿಯೇನೆಂದರೆ ೧೨ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯದ ವೇಳೆ ಮತ್ತು ಸಮೂಹಿಸಿರುವುದು ಅಂತರ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಎಣಿಸಿ ನಂಬುವ ಆಲೇಖವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ ವ ಈ ಸೂತ್ರವೂ ಸಹ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ ಇದು ಆ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಿರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಆಲೇಖವು ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವಿರುತ್ತದೆ.

೭.೩. ಈಗ ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿ.

೩೦ ತಿಂಗಳ ನೊಡಲು ತಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಗಿಸಿ ಸ್ವತಃ ಗಣಸಲಿಕೆ ಹತ್ತಿದನಂತರ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ತನ್ನ ಆದಾಯದೊಳಗಿಂದ ೨೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ತಿಲಕು ಇಡುವದೆಂದು ವಸಂತ ರಾಯರು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರು. ಮತ್ತು ಆದರಂತೆ ಅವರು ನಿಯಮಿತ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡುತ್ತ ಬಂದಿರುವರು. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಆ ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ತಾನು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸಲು ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಇಂದು ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨೦೦ ರೂ ಉಳಿತಾಯವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಉಳಿತಾಯದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

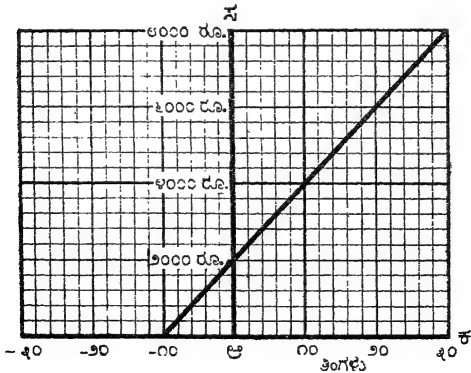
ಮುಂದಿನ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಆಕೆ ಈ ಅಡ್ಡ ಗೆರೆಯು ಈ ಮುಂದಿನ ಕಾಲವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆಕೆ ಈ ಉದ್ದರೇಖೆಯು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಆಲೇಖವು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು

ಶಿಲುಕರುತ್ತದೆಯುಡನ್ನು
 ತೋರಿಸುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಈ
 ನೋದಲೇ ಯಾನಾಗ
 ಎಷ್ಟು ಶಿಲಕತ್ತೆಯುಡನ್ನು
 ಅದು ಹೇಳುವದಿಲ್ಲ.
 ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಆಕ ಈ
 ರೇಷೆಯನ್ನು ವಿರುದ್ಧ
 ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಬೇಕಾ-
 ಗುವದು, ತರುವಾಯ
 ಅಲೇಖವು ಮುಂದೆ
 ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರು-
 ವದು.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೪.

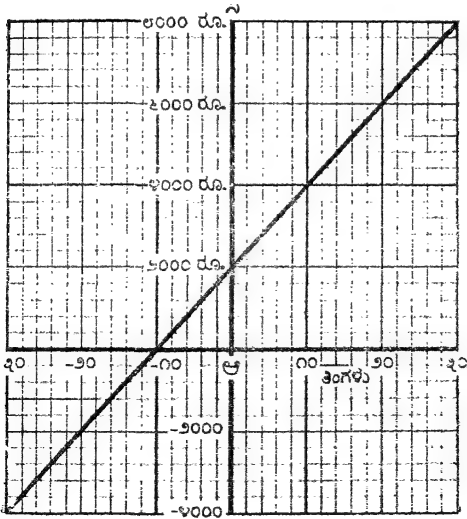
ಈ ಅಲೇಖವು ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೫) ಸ್ಪಷ್ಟ ಕಂಡುಬರುವವೇನಂದರೆ
 ವಸಂತರಾಯರು ಪ್ರಾರಂಭದಿಂದ ನಿಯಮಿತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ 200 ರೂ.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೫

ತೆಗೆದಿಟ್ಟರೂ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಕಳೆದ ೧೦ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಹಣವು ಕೂಡಹತ್ತಿತು. ಆ ಮೊದಲಿನ ತಲುಕು ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ವೆಚ್ಚ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಸಾಲವು ೨೦೦ ರೂ.ಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಲಿದೆ. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಆಲೇಖವು ತೋರಿಸಲಾರದೇ? ಅಥವಾ ಈ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದು ಆ ಲೇಖವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇರುವದು. ಮತ್ತು ಆ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ (ಕ್ರ.೬) ನಮಗೇನು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ?

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ೨೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂಪಿ, ಅವರಿಗೆ ೪೦೦೦ ರೂ. ಸಾಲವಿತ್ತು. (ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ—೪೦೦೦ ರೂ.). ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅದು



೨೦೦ ರೂ.ಗಳಂತೆ ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗಿ ೧೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ಅದು ನಿಃಶೇಷವಾಯಿತು, ಅಂದರೆ ಅವರು ಖುಣಮುಕ್ತರಾದರು. (ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, ೦ ರೂ.). ಇದು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, + ೨೦೦೦ ರೂ. ಇನ್ನೂ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ = $(೨೦೦೦ + ೩೦ \times ೨೦೦)$ ರೂ. = ೮೦೦೦ ರೂ. ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ, ಮತ್ತು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಆಗಿರುವ ಅವಧಿಯು ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವದಿದ್ದರೆ, ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದೆ ಆಗುವ ಅವಧಿ (ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ) ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸ ಮತ್ತು ಕ ಈ ವರ್ಗಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಂದು ೨೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅವರು ೨೦೦ ರೂ. ತಿಲುಕು ಇಡುವದರಿಂದ, ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಎಂದು ಆ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು.

ಕ = ೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦. ಅಂದರೆ ಇಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೨೦೦೦ ರೂ.

ಕ = ೩೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೬೦೦೦ = ೮೦೦೦, ಅಂದರೆ ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ತರುವಾಯ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೮೦೦೦ ರೂ. ಕ = ೬೦ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೬೦೦೦ = ೮೦೦೦, ಅಂದರೆ ಸರಿಯಾಗಿ ೬೦ ತಿಂಗಳುಗಳ ಹಿಂದೆ ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣವು ೮೦೦೦ ರೂ. ಅಂದರೆಯೇ ಸಾಲ. ೪೦೦೦ ರೂ.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಗತಿಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವವು. ಕ್ರ. ೬ನೇ ಆ ಲೇಖನ ಯಾವ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆವೋ ಅವೇ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣವಾದರೂ ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಇದು ಆ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು ಅದು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವೆಂದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗುವದಿಲ್ಲವೇ?

೨.

೨.೪. ಹಿಂದಿನ ನಾಲ್ಕು ಇಯತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದವೋ, ಓದಿದವೋ ಮತ್ತು ನೋಡಿದವೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಋಣ

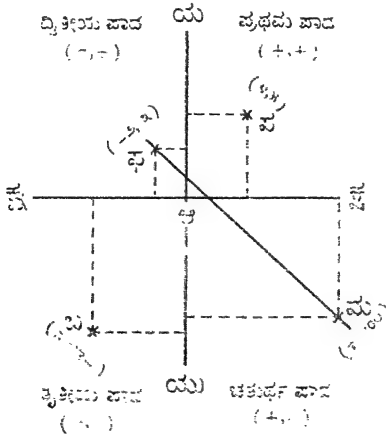
ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದಿಲ್ಲ. ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಇರುವ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೊನೆಗೆ ತೆಗೆದಿದ್ದೇವೆ (ಕ್ರ. ೩ ಮತ್ತು ಕ್ರ. ೬) ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧವಾದರೂ ಬಂದಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಭೇದಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆರಂಭ ಸ್ಥಾನದ ಎಡಬದಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಬದಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಅಲೇಖ ಪತ್ರದ ನಾಲ್ಕುಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಾದ (Quadrant) ವೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ (ಕ್ರ. ೭) ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರಥಮಸಾದ, ದ್ವಿತೀಯಸಾದ, ತೃತೀಯಸಾದ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಥಸಾದಗಳೆಂದು ಸಂಬೋಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಅಕ್ರಮಿಸುವ ಮೊದಲು ಅಲೇಖ ವಿಸ್ತಾರದ ಸ್ವಲ್ಪ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಿವ್ವಾಗ ನಾವು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಅನುಕೂಲ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಕಾಟಕೋನದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ, ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಉದ್ದ, ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಅಕ್ಷಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇದ್ದು, ಅಡ್ಡ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ Horizontal) ಗೆರೆಗೆ ಭುಜಾಕ್ಷವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಉದ್ದ (ಕ್ಷಿತಿಜ ಲಂಬ Vertical)ಗೆರೆಗೆ ಕೋಟ್ಯಕ್ಷವೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಅಕ್ಷಗಳ ಭೇದದಬಿಂದುವಿಗೆ ಆರಂಭಸ್ಥಾನೆ ಇಲ್ಲವೆ ಪ್ರಸ್ಥಾನವೆಂದು ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಇದು ಆರಂಭಸ್ಥಾನವಿದ್ದು ಪುನಃ ಮತ್ತು ಯುಆಯ ಇವು ಅಕ್ಷಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯದು ಭುಜಾಕ್ಷವಿದ್ದು ಎರಡನೆಯದು ಕೋಟ್ಯಕ್ಷವಿರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಹೆಸರುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಯು-ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಸಹ ನಾವು ಅನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳವು ಪ್ರಧಾನಯೋಜ್ಯೋತ್ತರ ವೃತ್ತದಿಂದ ಪೂರೈಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ಇಂತಿಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ವಿಮನವೃತ್ತದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲವೆ ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕೆ ಇಂತಿಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿದಾಗ, ಅಂದರೆಯೇ ಆದರ ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕೋಟ್ಯಕ್ಷದಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎಡಗಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಮತ್ತು ಭುಜಾಕ್ಷದಿಂದ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲವೆ ಕೆಳಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದೆಂಬುದು ತಿಳಿದರೆ ಅಲೇಖಪತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದು. ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಳವು ಎಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೇಗೆ ನಾವು ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಳುತ್ತೇವೋ, ಅದರಂತೆಯೇ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವು ಅಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದಿರುವ ಅದರ ಅಂತರಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಕೇತದಿಂದ ನಾವು ಬಲಗಡೆಯ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯವುಗಳನ್ನು ಋಣ (-); ಮತ್ತು ಮೇಲಿನವುಗಳನ್ನು ಧನ (+), ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಋಣ (-) ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟ್ಯಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅದರ ಭುಜಾಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಅದರ ಭುಜವೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಭುಜಾಕ್ಷದಿಂದಿರುವ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಅದರ ಕೋಟ್ಯಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಅದರ ಕೋಟಿ ಎಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವಂತೆ ಅಳೆಯಲ್ಪಡುವದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕೆ ಭುಜಾಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಭುಜ ಮತ್ತು ಎಡದನೆಯದಕ್ಕೆ ಕೋಟ್ಯಂತರ ಇಲ್ಲವೆ ಕೋಟಿ ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಷಯದ ಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ, ಬಲಗಡೆಯ ಭುಜಾಂತರಗಳು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯವು ಋಣ (-); ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಕೋಟ್ಯಂತರಗಳು ಧನ (+) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನವು ಋಣ (-). ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಕ್ಷಗಂವಿರುವ ಅಂತರಗಳಿಗೆ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುವಾಗ ಭುವಾಂತರವನ್ನು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಂತರವನ್ನು ತರುವಾಯ ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತಾರೆ. ಭೂಜ (ಅಡ್ಡ ರುವ ಅಂತರ), ಕೋಟಿ (ಉದ್ದ ರುವ ಅಂತರ). ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕಂಪನಕ್ಕೆ, ನಮನೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಮರಾದ ಚಿನ್ನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೩.

ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಈ ಅಂತರಗಳು ೪ ಮತ್ತು ೫ ಮಾನಗಳು (Units) ಇದ್ದರೆ, ಅಕ್ಷಗಳ ಬುಲೆ (ಬುಲನ್ನು ನಾಪ್ತ (೪, ೫) ಎಂದು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಫ (೫, ೩) ಇದರ ಅರ್ಥವು ಫ ಈ ಬಿಂದು ವಿನ ಭೂಜ ೫ ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೋಟಿಯು ೩ ಮಾನಗಳಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ಇರುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ೦, ೧/ ಈ ಮಾನವನ್ನು (Unit) ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಯಾವುದರ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕೋಟಿರುತ್ತವೆಯೋ ಅಂಥ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆಲೇಖಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಬಿಂದುಸ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲವೆ

ಸ್ಥಾಪನ ಮಾಡುವದು (Plotting the point) ಎಂಬುದನ್ನು ತ್ವರಿ. (ಮಾನ್ Unit ಈ ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಏಕಾಂಕ ಎಂಬ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.)

ಮೇಲಿನ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (೪, ೫), (—೨, ೩), (—೬, —೪), (೧೦, —೭), ಇರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿವು ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ, ಫ, ಬ ಮತ್ತು ಮ ಈ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟೆವೆ. ಫ, ಮ, ಇದು (೨, ೩), (೧೦, —೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯ ಕಡೆಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಗೊಟ್ಟು ನೋಡಿದರೆ ಕಂಡುಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಸಾದದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಧನ (+, +) ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಭುಜ, ಋಣ ಮತ್ತು ಕೋಟಿ ಧನ (—, +) ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಋಣ (—, —). ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯದರಲ್ಲಿ ಭುಜ ಧನ ಮತ್ತು ಕೋಟಿ ಋಣ (+, —) ಇರುವವು.

ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನೀವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಮತ್ತು ಚೌಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧-೬ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಚೌಕೋನಗಳು ಎಳೆದಿರುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಚೌಕೋನಗಳ ಕಾಗದವೇ ಬೇಕು, ಇಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಬರಲಾರದದು, ಅಥವಾ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರಲಾರದದ್ದಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಚೌಕೋನಗಳಿಲ್ಲದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆಯೂ ಸಹ ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು. ಅದರ ಅನುಕೂಲತೆಯ ಕ್ರಶ್ಚೆ ಇರುವದು. ಚೌಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭವಾಗುವುದಲ್ಲದೆ ಅದನ್ನು ಬೇಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದುದರಿಂದ ನಾವು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯು ಹೀಗಿರುವದು. ಮೊದಲು ಆರಂಭ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಭುಜಾಂತರವನ್ನು ಭುಜಾಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಳೆಯಬೇಕು. ತರುವಾಯ ಆ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಕೋಟ್ಯಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೋಟ್ಯಂತರವನ್ನು

ಅಳೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವು ಸಮಗ್ರ ಮೊರೆಯುವದೋ ಅದೇ ನಮಗೆ ಸಿಗಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಂದು.

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

[ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಘಾತ (Unit) ಯಾವುದು ತಿಳಿದು-
ಕೊಂಡಿರುವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಪ.ಕೆ.ಯ.ಬಿ.ಬಿ.ರಿ.]

೧. ಅಕ್ಷಯಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೨, ೬); (೩, ೮); (-೫, ೩); (-೬, -೪); (೩, -೬); (-೪, -೮); (೫, -೮); (-೬, ೫) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

೨. (-೧, -೪), (೨, -೫), (೧, -೧), (೨, ೩), (೩, ೨) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

೩. (-೮, ೪), (-೬, ೪), (೨, ೪), (೪, ೪) (೬, ೪) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವೇನು ?

೪. (-೫, ೫), (೫, ೬), (-೫, ೦), (-೫, ೪), (-೫, ೬), ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವು ಯಾವುದು ?

೫. (೨, -೫), (೨, -೧೦), (೬, -೧೫), (-೨, ೫), (-೪, ೧೦), (-೬, ೧೫) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವು ಯಾವುದು ?

೬. (೨, ೮), (-೮, -೫), (೧೦, -೪) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚೋಡಿ-ಸುವ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

೭. (-೪, ೬), (-೬, ೬), (೨, -೮), (೨, ೬) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚೋಡಿಸುವ ಪಶ್ಚಿಮಾಂಶವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

೩.

೭.೫. ಈಗ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಹಿಂದೆ ಹೊರತೆಗೆದಾ. ಪ. ೭.೨ರಲ್ಲಿಯ ಗಾಡಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಸಮ್ಯಕ್ ಉಪನಿರ್ದಿರುವ ಗಾಡಿಯ ಅಂತರ

(ಮ) ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಾನ್ಹದ ತರುವಾಯದ ಮೇಳಿಯು (ನ) ಇವು ಒಂದರ-
ಮೇಲೊಂದು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳಿದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ-
ವನ್ನು $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನಾವು
ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $ಮ$ ದ ಜಿಲೆಯಿಂದರೆ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ರಾಶಿಯು
ಜಿಲೆಯು ಮತ್ತು ಅದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರು-
ತ್ತದೆ. $ನ$ ದ ಜಿಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗಾಗೆ
 $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ರಾಶಿಯು ಜಿಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂದರೆಯೇ $ಮ$ ದ ಜಿಲೆಯಲ್ಲಾ ದರೂ
ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಸಂಗತಿಯು
ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.

ಮ =	-೫	-೪	-೩	-೨	-೧	೦	೧
ಮು $೧೦೦ + ೪೦ನ$ =	-೧೦೦	-೬೦	-೨೦	೨೦	೬೦	೧೦೦	೧೪೦
ನ =	೨	೩	೪	೫			
ನ = $೧೦೦ + ೩೦ನ$ =	೧೨೦	೨೨೦	೩೨೦	೪೦೦			

ಇಲ್ಲಿ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ $ಮ$
ಈ ರಾಶಿಯವಾದರೂ ಅಂದರೆ $ಮ$ ದ ಜಿಲೆಯೂ ಸಹ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ
 $ನ$ ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜಿಲೆಗೆ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ $ಮ$ ದ ಅ. $ಮ$ ದ ನಿಶ್ಚಿತವಿರುವ
ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಜಿಲೆಯಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ $ನ$ ದ ಜಿಲೆಯ
ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಇರುವುದರಿಂದ $ಮ$ ದ ರಾಶಿಯು ಜಿಲೆಯು
ಎರಡನೇ ಚರ (Variable) ಸಂಗತಿಯು ಜಿಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತ-
ದೆಯೋ ಆ ರಾಶಿಯು ಎರಡನೆಯವರ ಫಲ (Function) ಪಿರುತ್ತದೆಂದೆ-
ನ್ನು ತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ $೧೦೦ + ೪೦ನ$ $ಮ$ ಈ ರಾಶಿಯು $ನ$ ದ ಫಲವಿರುವದು. ಈಗ
 $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಅಂದರೆಯೇ $ಮ$, ಅದುವರಿಂದ $ಮ$ ಇದು $ನ$ ದ ಫಲವಿರು-
ವದು. ಗಾಡಿಯು ಹೋಗುವ ಅಂತರವು ಮೇಳಿಯ ಫಲವಿರುವದು.

ಕ್ರ. ೩ನೆಯ ಅಲೇಖವು $೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ರಾಶಿಯು (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲ ದೆ)
ಅಲೇಖ ಇಲ್ಲವೆ $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ನ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವಿರುವದು.
ಆ ಅಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ (—೫, —೧೦೦),
.... — ನೋ. ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದುದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಪ್ರತಿವಕ್ಷ್ಯೆ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯು ಅಸಲು ಎಷ್ಟಿರುವದೆಯ ಸಂಗತಿಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದರಿಂದ ಬಡ್ಡಿ ಇದು ಅಸಲಿನ ಫಲವಿರುವದು. ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟುಗೂಡುವ ತಿಂಗಳಿನ ಫೀ ಇದು ಹೆಚ್ಚುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದರಿಂದ ತಿಂಗಳ ಒಟ್ಟು ಫೀ ಹಣವು ಹೆಚ್ಚುಗರ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಫಲವಿರುವದು. ಅವರಂತೆಯೇ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಳತೆಗಳ ಫಲವಿರುವದು, ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ತಳ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಇವುಗಳ ಫಲವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಇಟ್ಟಿಗೆಯ ಫಲಫಲವು ಉದ್ದಳತೆ, ಅಗಲಳತೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಇವುಗಳ ಫಲವಿರುವದು. ಸ್ಪಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವ ದೆಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಎರಡನೆಯದರ ಫಲವಿರುವದು, ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಗತಿಯು ಬೆಲೆಯು ಎರಡನೆಯದರ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವದು ಈ ಎರಡರ ಮುಕ್ತಾರ್ಥವು ಒಂದೇ.

ಪ್ರ. ೭. ೧. ನೆಯದರಲ್ಲಿಯ ವರ್ಷವಾರುರ ಉತ್ಪಾದನ ಹಣವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಇರುವುದು ಮುಂದಿನ ಕಾಲ (ಕ) ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಿದ ಹಣ (ಸ) ರವುಗಳಿಗಿಗಿನ ಸಂಬಂಧ $ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ$ ಎಂದು ಇರುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣವು (ಸ) ಎಷ್ಟೆಂಬುದು ಕ ದ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಿರುವದೋ ಅದರ ಮೇಲೆ ಪೂರೈವಾಗಿ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಕ ಹೇಗೆ, ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಹಾಗೆ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ ಅಂಕಿಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಬರುವದು.

ಕ =	೨೦	೨೫	೩೦	೩೫	೪೦	೪೫	೫೦	೫೫	೬೦	೬೫
ಸ =	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦
ಕ =	೨೦	೨೫	೩೦							
ಸ =	೨೦೦೦	೨೦೦೦	೨೦೦೦							

ಇಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಕ ಚರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಅವರ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ $೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ದ$ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಅದರಂತೆಯೇ ಸ ದ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಕ ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಪೂರೈವಾಗಿ ಕ ದ

ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಅದರೆಯೇ ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ರಾಶಿಯು ಮತ್ತು ಅದುದರಿಂದಲೇ ಸ ಇದು ಕ ದ ಫಲ ವಿರುವದು.

ಕ್ರ. ೬ ನೇ ಅಲೇಖವು ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ರಾಶಿಯ ಇಲ್ಲವೆ (ಫಲದ) ಅಲೇಖವು ಇಲ್ಲವೆ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವಿರುತ್ತದೆ, ಆ ಅಲೇಖವ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ (—೩೦, —೪೦೦),.....ಮೊದಲಾದ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸ್ಥಿರವಿಲ್ಲವೇ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವವೋ ಅಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಚರಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೆ ಕೇವಲ ಚರಗಳೆಂದು ಸಂಜ್ಞೆ—ಯಿರುತ್ತದೆ. ಮ=೧೦೦೦ + ೪೦ ವ; ಮತ್ತು ಸ=೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮ, ವ, ಸ, ಕ ಇವು ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯಾವ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ತೆಗೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ಇಲ್ಲವೆ ಪರಾಧೀನ ಚರಗಳೆಂದೂ, ಮತ್ತು ಯಾವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮೊದಲನೇ ಚರಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ತೆಗೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆಯೋ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರತಂತ್ರ ಇಲ್ಲವೆ ಪರಾಧೀನ ಚರಗಳೆಂದೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವ ಮತ್ತು ಕ ಇವು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರಗಳಿದ್ದು ಮ ಮತ್ತು ಸ ಇವು ಪರತಂತ್ರ ಚರಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪರತಂತ್ರ ಚರವು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರದ ಫಲವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಕೂಡದು.

೪ಕ್ಷ, ೩ಕ್ಷ—೭, ೨ಕ್ಷ+೫, ೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ+೨ಕ್ಷ—೩,

$$\frac{4}{25} - \frac{3}{25} + \frac{5}{25} \dots \dots$$

ಈ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳು ೨೫ ಈ ಚರದ ಫಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ೨೫ ವ ಕೊಟ್ಟು ಬೆಲೆಯಿಂದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ನಿಶ್ಚಿತವಿರುವಂಥ ಬೆಲೆಯು ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೨೫ ವ ಬೆಲೆಯು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಬದಲಾಗುತ್ತ-ಹೋಗುತ್ತದೆ. ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯ ನಿರ್ವೇಶನವನ್ನು ಯ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ ಇವೇ ಫಲಗಳು ಯ = ೪ಕ್ಷ, ಯ = ೩ಕ್ಷ—೭, ಯ = ೨ಕ್ಷ+೫, ಯ = ೨ಕ್ಷ

$$+ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \dots$$

ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲು ಬರುವವು. ಮತ್ತು ತರುವಾಯ ಆ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕೆ ಇದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವಿದ್ದು ಯ ಇದು ಪರತಂತ್ರ ಚರವಿರುವದು.

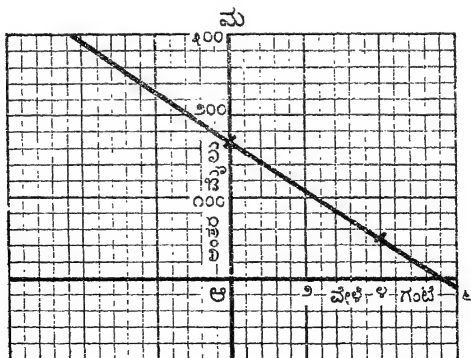
೭.೬. ಈಗ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲವ) ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ, ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವನ್ನು ಹೀಗೆ ತೆಗೆಯುವುದುಬಹುದು ನೋಡುವಾ. ಮಧ್ಯಾಂತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಾಡಿಯು ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಗೆ ೧೭೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ಅದು ನಮ್ಮ ಊರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೨೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಬರುತ್ತಲಿದೆ, ಆದರೆ ಅದು ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಯಾವ ವೇಳೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಿದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿ. ನಮ್ಮ ಊರಿನಿಂದ ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂತರವು ಇರುವದೋ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು ಮೆ ದಿಂದ ಮತ್ತು ೧೭ ಗಂಟೆಯ ನಂತರದ ವೇಳೆಯ ನಿರ್ದೇಶನವನ್ನು (ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ) ಮೆ ದಿಂದ ಮಾಡಿದರೆ, ೧೭ ಗಂಟೆಗೆ ಗಾಡಿಯು ೧೭೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದು ತಾಸಿಗೆ ೨೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ನಮ್ಮ ಊರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರುವದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊರಿಂದಿರುವ ಅಂತರ ಮತ್ತು ೧೭ ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯವ ವೇಳೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಮೆ=೧೭೦-೨೦ ವ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

೧೭೦-೨೦ವ ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖ ಮತ್ತು ಮೆ ೧೭೦-೨೦ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ಇವೆರಡೂ ಒಂದೇ. ಇಲ್ಲಿ ೧೭೦-೨೦ವ ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯು ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಇರುವುದೋ ಅದನ್ನು ಮೆ ಈ ವರ್ಣದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ ೧೭೦-೨೦ವ ಈ ಏಕವರ್ಣ ಏಕಘಾತ ರಾಶಿಯ ಬದಲಾಗಿ ಮೆ=೧೭೦-೨೦ವ ಈ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣದ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ. ಏಕಘಾತ ಏಕವರ್ಣ ರಾಶಿಯ ಇಲ್ಲವೆ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖವು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಿರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಬಾರಿ-

ಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಹಾಗೇ ಇರುತ್ತದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಸಹ ಬರುವದು. ನೀವು ಬೇಕಾದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ವರ್ಣಗಳ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಆ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವವೆಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಈಗ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ತಪ್ಪು. ಗುನವಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಮನಗಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು ಇಷ್ಟವಾದುದು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ v ದ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇದ್ದಾಗ $u = 20 - 2v$ ವ ದ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇರುವದು ಅಂದರೆಯೇ v ಮತ್ತು u ಇವುಗಳ ಯಾವ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣವು ಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

$v = 0, 1, 2$ ಇದ್ದಾಗ

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $u = 20 - 2 \times 0 = 20, 18, - 2$ ಇರುವದು.



ಅಲೇಖ ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ (೦,೧೭೦). (೪,೫೦), ಮತ್ತು (೬,—೧೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. (ಮೂರೂ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು-ಕೊಳ್ಳತಕ್ಕದ್ದು.)

ಗಾಡಿಯು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಇದೇ ಅಲೇಖವು. ೧೭೦ ೩೦ವ ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಅಲೇಖವು. ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ಮುಂದೆ ೩೦ ವ ಈ ಸಮೀಕರಣದ್ದೂ ಇದೇ ಅಲೇಖವು. ವ ಮತ್ತು ಮ ಇವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆಗಳ ಯಾವುದೇ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಇದೇ ಅಲೇಖದ ಮೇಲಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು.

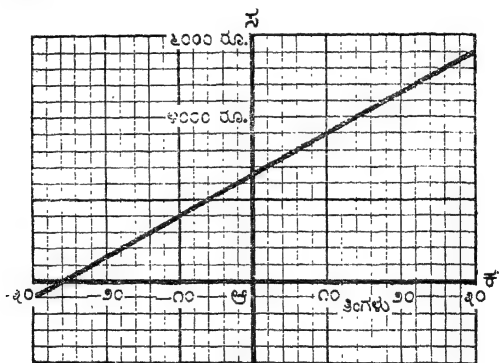
೭.೬. ಇನ್ನೊಂದು ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ.

ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸೇರಿ ಇಂದು ೩೦ ತಿಂಗಳುಗಳಾದವು. ಮೊದಲಿನಿಂದ ಅವರು ನಿಯಮಿತವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ. ಯಂತೆ ಶಿಲುಕು ಇಡುತ್ತಾರೆ. ಮೊದಲಿನ ಕೆಲವು ಶಿಲುಕನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಾಲವನ್ನು ತೀರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದರು. ಮತ್ತು ಇಂದು ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ೨೬೦೦ ರೂ.ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಂದಿನಿಂದ ಯಾವಾಗಾದರೂ ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಕೂಡಿದ್ದಿರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆ ಸೂತ್ರದ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇಂದಿನಿಂದ ಮುಂದಿನ ಕಾಲವನ್ನು (ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ) ಕ ದಿಂದ ಮತ್ತು ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣವನ್ನು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಸ ದಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ, ಶಿಲುಕು ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಅವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಇಂದು ೨೬೦೦ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಅವರು ೧೦೦ ರೂ. ಶಿಲುಕು ಇಡುವದರಿಂದ, $s = 2600 + 100 \times k$ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಡಿಸಲು ಬರುವದು. ಈಗ $s = 2600 + 100 \times k$ ಈ ರಾಶಿಯ (ಇಲ್ಲವೆ ಫಲದ) ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ

ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವಾ. $k = 0, -2, 10$ ಇವಕ್ಕೆ
 $s = 2500 + 100k$ $k=2500, 0, 2500$ ಇರುವದು.

ಈಗ ನಾವು ಆಲೇಖಿಸುತ್ತವೆ ಮೇಲೆ $(0, 2500)$ ಮತ್ತು $(-2, 0)$
 ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು
 ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳ ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ
 $(10, 2500)$ ಈ ಬಿಂದುವು ಸಹ ಇರುವದರಿಂದ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವವ-
 ರಲ್ಲಿ ಯಾವದೇ ತಪ್ಪು ಆಗಿಲ್ಲ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ಕ.

$2500 + 100k$ ಈ ರಾಶಿಯು ಇಲ್ಲವೆ $s = 2500 + 100k$ ಈ
 ಸಮೀಕರಣದ್ದು ಇದೇ ಆ ಆಲೇಖವು.

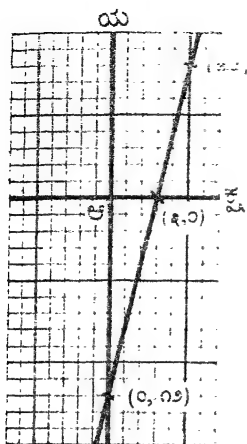
೭.೮. ೨೦. ೩. $4x - 12$ ಈ ರಾಶಿಯ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

$x = 0, 3, 6$ ಇದ್ದಾಗ

$4x - 12 = -12, 0, 12$ ಇರುವದು.

$(0, -12)$ ಮತ್ತು $(3, 0)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ ಮತ್ತು
 ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ.

೫, ೮) ಈ ಬಿಂದುವಾದರೂ ಅದರ ಮೇಲಿರುವದು.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೦.

ಮಾಡುವುದು ಅಕ್ಷೇಪಿಸು ಅವರ ಸ್ಥಿತಿ. ಒಮ್ಮೆಲೆಗೆ

ಕ್ರ. ೨, ೩, ೪, ೫ ಇವಾಗೆ

ಯ ೩, ೨, ೧, ೦ ಎಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವುದು.

(೦, ೩), (೨, ೦) ಮತ್ತು $(-೨, ೩)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ

ನಂತರ ಮೊದಲನೆಯ ಬಿಂದು

ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಮೂರನೆಯ

ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು

ಮೂರನೆಯ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ

ದರೂ ಕಾಣುವುದು. ಅದನ್ನು

ಕಂಡುಬರುವುದು. ಅದನ್ನು

ಅಕ್ಷ+೩ಯ = ೦ ಈ ಸಮೀಕರಣದ

ಕರಣದ್ದು ಇದೇ ಆ ಅಲೇಖವು.

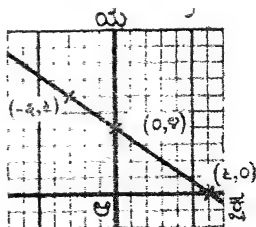
ಅಕ್ಷ-೦ ಈ ಕಾರಣದಿಂದ
ಅಲೇಖವು. ಅಕ್ಷ-೦ ಇದನ್ನು
ಬಿಂದುವನ್ನು ಯ ಮೊದಲನೆಯದರಿ
ಯ ಅಕ್ಷ-೦ ಈ ಸಮೀಕರಣದ
ಕರಣದ್ದು ದರೂ ಇದೇ ಅಲೇಖವು.

ಉ.೪. -೩+೩ಯ = ೦
ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವು.
ಬಿಂದುವು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
ಸಮೀಕರಣವು

ಯ = ೦ -೩

೩. ಯ = ೩

ಎಂದು ಬರೆದು ಅವರನ್ನೇ ಅವರ
ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಮೆಯು ಯ ಗೆ
ಅನುರೂಪ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗನ್ನು
ಶಿಗೇಯಲು ಬರುವುದು. ಅವರ ಹಾಗೆ



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೧.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೭.

೧. ಮುಂದಿನ ರಾಶಿಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ :

- (೧) $೨\bar{೨} + ೩$; (೨) $೪\bar{೨} - ೧$; (೩) $೫\bar{೨} + ೪$;
 (೪) $೯\bar{೨} - ೨$; (೫) $೧೨ - ೧$ ಸ; (೬) $೮ - ೪$ ಸ.

೨. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭೇದಿಸಿರಿ :

- (೧) $೪ = ೨\bar{೨} - ೩$; (೨) $೪ = ೨\bar{೨} + ೧$; (೩) $೪ = ೨\bar{೨} - ೫$;
 (೪) $೪ = ೨\bar{೨} + ೩$; (೫) $೨೪ = ೮ - ೨\bar{೨}$; (೬) $೪\bar{೨} + ೪ = ೫$;
 (೭) $\bar{೨} + \frac{೨}{೫} ೪ = ೨$; (೮) $\bar{೨} - ೪ = ೧$; (೯) $\frac{\bar{೨}}{೨} + \frac{೪}{೨} = ೫$;
 (೧೦) $\bar{೨} = ೪ - ೨$ ಸ; (೧೧) $೫\bar{೨} - ೨ = ೩$;
 (೧೨) $೪\bar{೨} - ೨\bar{೨} + ೨ = ೦$.

೩. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭೇದಿಸಿರಿ :

- (೧) $೪ = ೫\bar{೨}$; (೨) $೪ = ೨\bar{೨}$; (೩) $೨೪ + ೨\bar{೨} = ೦$;
 (೪) $೮ = ೨$ ಸ; (೫) $೮ - ೫\bar{೨} = ೦$;

ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟಗುಣವೇನು ?

೪. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭೇದಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೂಹದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಆಲೇಖವತ್ರದ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಯುವುದಿವಿ.

- (೧) $೪ = ೨\bar{೨} + ೫$; $೪ = ೨\bar{೨} - ೩$; $೪ = ೨\bar{೨} - ೧$; $೪ - ೨\bar{೨} = ೪$.
 (೨) $೮ = ೪\bar{೨} - ೩$; $೮ = ೪\bar{೨} + ೧$; $೮ = ೪\bar{೨} + ೪$;

$$೮ - ೪\bar{೨} + ೨ = ೦.$$

- (೩) $೩\bar{೨} + ೪\bar{೨} = ೯$; $೮ + ೫\bar{೨} = ೧$; $೩\bar{೨} + ೮ + ೮ = ೦$;

$$\frac{೮}{೪} + \frac{೮}{೩} = ೪.$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೂಹದೊಳಗಿನ ನಾಲ್ಕೂ ಆಲೇಖಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ?

೫. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯೆ ತಿರವಿಸಿದ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ
ತರುವಾಯ ಯಾವ ಪದವುಗಳೆ ಸಹಜವಾಗಿರತಕ್ಕವು? ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆಯೋ
ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಧೀನ ಮಾಡಿ. ೧೩-೧೬ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಿ.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{ಇದನ್ನು } x \text{ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ}$$

ಎಲ್ಲ ಪದವುಗಳೆ ಒಂದೇ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದು, ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆಯೇ?

೬. ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಮಾಡಲು ಬರುವ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ
ಪದವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಧೀನ ಮಾಡಿ. ೧೭-೨೦ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ + ೫ಯು + ೫ = ೦
ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಿ.

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{ಇದನ್ನು } x \text{ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ}$$

ಇತ್ತೀಚಾದರೂ ಎಲ್ಲ ಪದವುಗಳೆ ಒಂದೇ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು
ಕಂಡು ಬರುತ್ತವೆಯೇ?

೭. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳೆ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಿ. ಇವು
ಯೋಜನೆಯೊಡನೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ
ಪ್ರಶ್ನಿಸುವಂತೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(೧) $y = \frac{1}{2}x + 5$; $y = \frac{1}{2}x + 5$

(೨) $\frac{y}{x} + 5 = 5$; $\frac{y}{x} - 5 = 5$

(೩) $\frac{y}{x} + 5y + 5 = 0$; $\frac{y}{x} - 5y + 5 = 0$

(೪) $\frac{y}{x} + 5y + 5 = 0$; $\frac{y}{x} - 5y - 5 = 0$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಲೋಚನೆಗೆ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಕಂಡು
ಬರುತ್ತದೆ?

೮.

೮-೯. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸೂತ್ರವೊಳಗಿನ ಒಂದೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ
ಸಮೀಕರಣಗಳೆ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಆ ಅಲೋಚನೆಗಳು

ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ (೦,೦) ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆ-
ಗಳಿರುತ್ತವೆಂಬುದು ಕಂಡು ಬಂದಿರುವುದು. ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಪದ
(Constant term) ಇಲ್ಲ, ಇಂಥ ಅಂದರೆ ಯ = ಮಕ್ಷ, ಆಯ +
ಕಕ್ಷ = ೦ ಇಂಥಸ್ವರೂಪದ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆರೇಖ-
ಗಳೆಂದರೆ ಆರಂಭಸ್ಥಾನದೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಗಳೇ
ಇದ್ದಿರಬೇಕು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷ = ೦ ಇದ್ದರೆ ಯ = ೦ ಇದ್ದಿರ-
ಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ರೇಷೆಗಳು (೦,೦) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ
ಹಾಯ್ದು ಹೋಗಲೇಬೇಕು.

೭.೧೦. ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟ್ಯಂ.
ತರವೆಂದರೆ ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಶೂನ್ಯ ಅಂತರವು, ಆದುದರಿಂದ ಯ = ೦ ಇದು
ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು. ಆದರಂತೆಯೇ ಯ-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ-
ಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜಾಂತರವೆಂದರೆ ಯ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವು
ಶೂನ್ಯ, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ = ೦ ಇದು ಯ-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು.

೭.೧೧. ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ೫ ಮಾನಗಳ (Units) ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ
ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ
ಕೋಟಿಯು ೫, ಮತ್ತು —೫ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ
ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯು —೫,
ಆದುದರಿಂದ ಯ = ೫ ಮತ್ತು ಯ = —೫ ಇವು ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣ-
ಗಳಿರುವವು. ಆದರಂತೆಯೇ ೫ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವು-
ದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯು ೫ ಇರುವುದರಿಂದ ಯ = ೫
ಇದು ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು. ಯ = ೨, ಯ + ೩ = ೦
ಯ = ೬, ಯ + ೬ = ೦ ಇವು ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ (ಕ್ಷ-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಸಮಾಂ-
ವಿರುವ ರೇಷೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೭.೧೨. ಯ-ಅಕ್ಷದಿಂದ ೪ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ
ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜವು ೪, ಮತ್ತು —೪
ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾ-
ದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ-೪, ಆದುದರಿಂದ ಕ್ಷ = ೪, ಕ್ಷ = — ೪ ಇವು ಅವುಗಳ

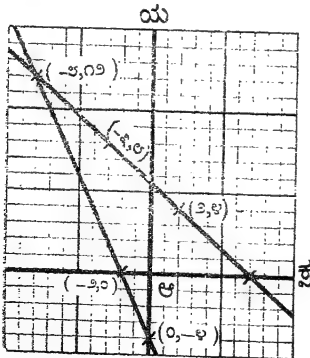
ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುವವು. ಅದರಂತೆಯೇ ಆ ಮಾನಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜ ಆ, ಅದರಿಂದ $ಕ್ಷ = ಅ$ ಇದು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವಿರುವದು. $ಕ್ಷ = ೨$, $ಕ್ಷ + ೨ = ೦$, $ಕ್ಷ = ೯$, $ಕ್ಷ + ೯ = ೦$ ಇವು ಕೋಟಿಕ್ಷಕ್ಕೆ (ಯ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ) ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೨.೦೬. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ೪ ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರೇಖೆ—ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿರುವುದು. ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಷ-ಪದವ ಸಹಗುಣಕವು ಅದೇ ಇರುವುದೋ, ಇಲ್ಲವೆ ಅಕ್ಷ + ಕಯ + ಗ = ೦ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಕ್ಷ-ಪದ ಮತ್ತು ಯ ಈ ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಯ = ಮಕ್ಷ + ಅ, ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ, ಯ = ಮಕ್ಷ + ಗ.... ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೨.೦೭. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹದೊಳಗಿನ ೭ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರೇಖೆ—ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿದ್ದು ಕಂಡುಬಂದಿರಬೇಕು. ಯಾವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅವುಗಳ ಕ್ಷ-ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು -೧ ಬರುವುದೋ, ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಿಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಯ = ಮಕ್ಷ + ಅ ಮತ್ತು ಯ = ಮಕ್ಷ + ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕಾಟಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ.

೫.

೭.೧೫. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ ನಾವು ಅದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತೀವೋ ಹಾಗೆಯೇ ಅದರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಅಲೇಖಕದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಬಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾದರೂ ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸಲು ಬರಬೇಕು. ಈಗ ಅವುಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಗಳ ಯಾವ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಅಂಥವು ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವುವರ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಇರುವವೋ ಅಂಥ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತೀವೋ, ಅದರೊಳಗಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುತ್ತೀವೋ ಮತ್ತು ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಹೇಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವಿರುತ್ತದೆಯೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಅಲೇಖದ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಹುಮಾನವಿದ್ದಾಗ ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವದು, ಅವುಗಳ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವದು ಮತ್ತು ಈ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ ಅವುಕ್ಕೆಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು-



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೩.

ಕೊಂಡರೆ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಅದೇ ಬೇಕಾಗುವ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು ಬರಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೩) ನಮಗೆ ಮಂಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ನಾವು ನೋಡುವುದೇನೆಂದರೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯು (೨, ೩) ಮತ್ತು (-೩, ೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ

ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಾಧಾರಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
 $y = -x + 3$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಸರಳ ರೇಖೆಯು (೨, ೪).
 ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದರಿಂದ $x = 2$, $y = 4$ ಇದ್ದರೆ
 ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದರಂತೆಯೇ ಅದು (—೨, ೦)
 ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವುದರಿಂದ $x = -2$, $y = 0$ ಇದ್ದರೂ
 ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗಬೇಕು. ಅದುವರಿಂದ

$$\begin{aligned} x &= 2, y = 4 \\ x &= -2, y = 0 \\ \therefore x &= -2 + 4 = 2, y = 4 - 0 = 4 \quad (1) \\ \therefore x &= 2 + 0 = 2, y = 0 - 4 = -4 \quad (2) \end{aligned}$$

ಮಾಡುವುದರಿಂದ $x = 2$, $y = -4$
 ಬಂದಿರುವುದರಿಂದ $x = 2$, $y = -4$
 $x = 2$, $y = -4$ ಕೆ. ಕೆ. ಬಿ.

$\therefore y = -x + 3$ ಇದು ಬೇಕಾಗಿದ್ದ ಸಮೀಕರಣವು. ಇದ್ದಿಲ್ಲದೆ
 ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈಗ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಂದ ೫ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು
 ಪಕ್ಕಾಂತರದಿಂದ $x + 5y = 15$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ನಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕಷ್ಟಗೊಳ್ಳುವೆಯಿರುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಬೇಕೆಂದು
 ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿ ಬರುವುದಾದರಿದ್ದು. ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದು
 ಕೊಂಡು ಅದರ ಸಹಸಮಾಂತರಕಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x ಮತ್ತು y
 ಇವುಗಳಿಗಾಗಬೇಕೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ
 ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಬೇಕು. ಈಗಲೂ (೨, ೪) ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಳಗಿಂದ
 ಹೋಗುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು $x = 2$, $y = 4$ ಎಂದು
 ಇಟ್ಟರೆ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ಅಲ್ಲದೇ ಪತ್ತವ ಮೇಲಿನ ಎರಡನೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು-
 ಕೊಳ್ಳುವ. ಇದು (೦, —೪) ಮತ್ತು (—೨, ೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ
 ಹೋಗುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣವು $y = -2x - 4$
 ತಿಳಿದರೆ $x = 0$ ಇದ್ದಾಗ $y = -4$, ಮತ್ತು $x = -2$ ಇದ್ದಾಗ $y = 0$,

∴ $-೪=೦ \times ಮ + ಗ$ ಅಂ. $ಗ = -೪$,

$೦ = -೨ಮ + ಗ$ ಅಂ. $ಮ = ೨$ ಗೆ $= -೨$.

∴ $ಯ = -೨ \times -೪ = ೮$ ಇದು ಬೇಕಾಗಿತ್ತು ಸಮೀಕರಣವು. ಇಷ್ಟವಿದ್ದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $೨ \times ೨ + ಯ + ೪ = ೦$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು.

೭.೧೬. ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೧೨) ಎರಡೂ ಅರ್ಥಬಗಲ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು $(-೪, ೧೨)$ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದ $(-೪, ೧೨)$ ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಅರ್ಥಬಗಲಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಿದೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ $೨ \times ೨ = -೪$ ಮತ್ತು $೨ \times ೧೨ = ೦$ ಎಂದು ಇಟ್ಟರೆ $೪ \times ೨ + ೪ = ೨೪$, ಮತ್ತು $೨ \times ೨ + ೪ = ೦$ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸೂತ್ರಶಿಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದು ಹಾಗೆ ಆಗೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದುದರಿಂದ ಎರಡು ಏಕಾಕ್ಷಾತ ದ್ವಿವಕ್ರ ಸಮುದಾಸಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಅವುಗಳ ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅರ್ಥಬಗಲವನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅರ್ಥಬಗಲ ಭೇದನವೆಂದುವೆನ ಸಹ-ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೇ ಅವುಗಳ ಮಾನವೆಂದುವೆನು. ಈ ಸಂಗತಿಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅನುವಾಕದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಿಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಅರ್ಥಬಗಲ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(೧) $(೪, ೮)$ $(೨, ೨)$, $(-೧, -೨)$.

(೨) $(೧, ೧)$, $(-೧, -೧)$, $(-೨, -೨)$.

(೩) $(-೪, ೦)$, $(೦, ೪)$, $(೨, ೧)$. (೪) $(-೪, -೨)$, $(೦, -೪)$, $(೨, -೧)$.

(೫) $(-೩, ೬)$, $(೦, ೫)$, $(೩, ೪)$. (೬) $(-೩, -೧)$, $(೧, ೩)$, $(೨, ೨)$.

(೭) $(-೩, -೨)$, $(೦, -೫)$, $(೩, -೩)$, $(೬, -೧)$.

(೮) $(-೪, -೪)$, $(೧, ೦)$, $(೬, ೪)$, $(೧೧, ೮)$.

(೯) $(೫, ೨)$, $(೧, ೧)$, $(-೩, ೦)$, $(-೨, -೧)$.

(೧೦) $(-೨, ೫)$, $(೧, ೧)$, $(೩, ೦)$, $(೫, -೧)$, $(೭, -೨)$.

೭.೧೭. ಪ. ೬ ರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಾಡಿಯ ಬರುವದೋಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆವೋ ಆ ಗಾಡಿಯು ಮತ್ತು ಪ. ೬ ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಬರುವದೋಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆವೋ ಆ ಗಾಡಿಯು, ಇವೆರವೂ ಸರಕ್ಕರ ಸಿರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಓಡುವದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅವು ಎರವೂ ಮುಖಾಂತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಸ್ಥಾನಗಳಿಂದ ಹೊರಟು ಮುಖಾಂತರ ಸುತರ ಮುಕ್ಕಾಲು ದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಅವು ಎರವದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಕೂಡಬೇಕು. ಒಂದೇ ಅರ್ಥವಲ್ಲದ ಮೇಲೆ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಯಾವುದೋ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ನಾವು ಆ ಎರವೂ ಗಾಡಿಗೆ ಮಾರ್ಗಕ್ರಮದ ಅರ್ಥವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು.

ಹಿಂದೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆಯೇ ಅದೇ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ೧೨ ಗಂಟೆಯ ಕಾರ್ಯವಾದ ಮೇಲೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಸಮ್ಮಾ ಉರಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಸಮೂಹವಿರುವ ಮೇಲ್ಕಡೆಗೆ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದು ಅದು ಮುಂದೆ ತಾನಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿರುವದು, ಅದುವರಿಂದ ಸಮೂಹವಿರುವ ಮೇಲ್ಕಡೆಗೆ ಅದರ ಅಂತರವು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ (೦ ತಾಸುಗಳ ಮೇಲೆ)

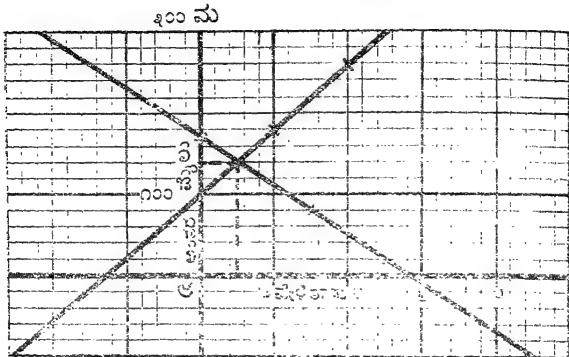
(೧೨ ಗಂಟೆಗೆ)	(೨ ಗಂಟೆಗೆ)	(೪ ಗಂಟೆಗೆ)
೧೦೦ ಮೈಲುಗಳು	೧೦೦ ಮೈಲುಗಳು	೨೦೦ ಮೈಲುಗಳಿರುವದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವು - ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ಪ್ರವಾಸದ ಅರ್ಥವಾಗುವದು.

ಇನ್ನು ಎರವನೇ ಗಾಡಿ. ಅದು ೧೨ ಗಂಟೆಗೆ ಸಮೂಹವಿರುವ ಮೇಲ್ಕಡೆಗೆ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ೧೦೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು ಮತ್ತು ತಾನಿಗೆ ೨೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಸಮೂಹವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವದು. ಅದುವರಿಂದ ಸಮೂಹವಿರುವ ಮೇಲ್ಕಡೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಅಂತರವು

೧೨ ಗಂಟೆಗೆ,	೨ ಗಂಟೆಗೆ,	೫ ಗಂಟೆಗೆ.
೧೭೦ ಮೈಲುಗಳು	೮೦ ಮೈಲುಗಳು	೨೦ ಮೈಲುಗಳಿರುವದು.

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಈ ಎರಡನೆಯ ಗಾಡಿಯ ಮಾರ್ಗ-ಕ್ರಮಣದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೩.

ಈಗ ಈ ಎರಡೂ ಗಾಡಿಗಳು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಭೇಟಿಯಾಗುವವೋ ಆ ವೇಳೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಸ್ಥಳವನ್ನೂ ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳ ಮೇಲೆ ಇರಲೇಬೇಕು. ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುವು ಅಂದರೆ ಯಾವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಆ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅಂತಹದು. ಅಲೇಖಗಳ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ (೧, ೧೪೦) ಇದು ಆ ಬಿಂದು-ಒದ್ದಾದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ಮುಖ್ಯಸ್ಥನ ನಂತರ ೧ ತಾಸಿನ ಮೇಲೆ ಆ ಗಾಡಿಗಳು ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೧೪೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೇಟಿಯಾಗುವವು, ಮತ್ತು ಇದು ಸರಿಯೇ ಇರುವದು. ೧೩ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ೧೦೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ತಾಸಿಗೆ ೪೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಗಾಡಿಯು ೧ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ (೧೦೦+೪೦) ಅ. ೧೪೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವದು, ಮತ್ತು ೧೩ ಗಂಟೆಗೆ ನಮ್ಮೂರಿನಿಂದ ೧೩೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ

ಮೇಲೆ ಇರುವ ಮತ್ತು ನಮ್ಮೂರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿಯೇ ೩೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಬರುವ ಗಾಡಿಯಾದರೂ ೧ ಗಂಟೆಗೆ (೧೩೦-೩೦) ಅಂ. ೧೪೦ ಮೈಲು ಅಂತರದ ಮೀಲಿರುವುದು.

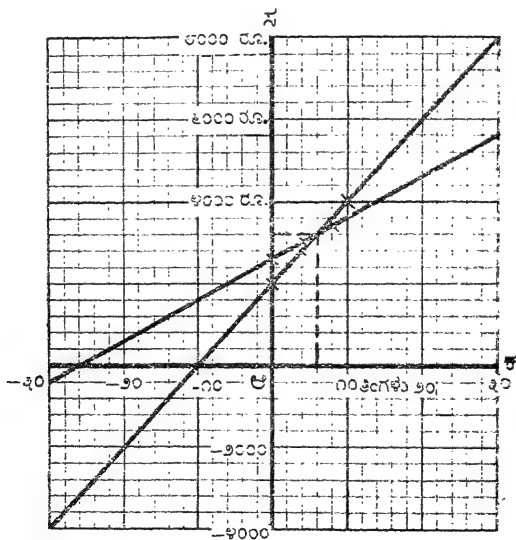
ಮೊದಲನೇ ಗಾಡಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮೇಕೆ (ವ) ಮತ್ತು ಅಂತರ (ಮ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ$ ಈ ಸೂತ್ರವೂ, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅವನ್ನು $ಮ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿ-
ಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ $ಮ = ೧೦೦ - ೪೦ವ$ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಅಲ್ಲದ ಸಮೀಕರಣವಿದ್ದು, $ಮ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ ಇದು ೨ ನೇ ಅಲ್ಲದ ಸಮೀಕರಣವಿರುವುದು. ಮತ್ತು ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಅಲ್ಲದ ಮೇಕೆ (೦, ೧೦೦), (೨, ೮೦), (೪, ೬೦) ಈ ಬಿಂದು-
ಗಳಿರುವವು. ಮತ್ತು $ವ = ೦, ೨, ೪$, $ಮ = ೧೦೦, ೮೦, ೬೦$ ಈ ಕೂಡಿರುವ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಿಂದ $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಅಲ್ಲದ ಮೇಕೆ (೦, ೧೩೦), (೦, ೮೦), (೪, ೬೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು, ಮತ್ತು $ವ = ೦, ೨, ೪$; $ಮ = ೧೩೦, ೮೦, ೬೦$. ಈ ಕೂಡಿರುವ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಿಂದ $ಮ = ೧೩೦ - ೨೦ವ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಎರಡೂ ಅಲ್ಲದಗಳಿಗೆ ಸಾಧಾರಣವಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರುವುದು ಎದೆಯಾಗುವೆ. ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ವತಿಯನ್ನು ಮಾಡುವಂಥ $ವ$ ಮತ್ತು $ಮ$ ಇವುಗಳ ಜಿಲ್ಲೆಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಇರುವುದು. ಸಾಧಾರಣ ಬಿಂದುವಿನ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (೧, ೧೪೦) ಇವು ಇರುವುದರಿಂದ $ವ = ೧$, $ಮ = ೧೪೦$ ಈ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ವತಿಯಾಗಬೇಕು. ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕಾಣುವುದೂ ಇದ್ದು. $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ವ$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $ವ = ೧$ ಇದ್ದಾಗ $ಮ = ೧೦೦ + ೪೦ = ೧೪೦$. $ಮ = ೧೩೦ - ೨೦ = ೧೪೦$.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗುವ ಸಂಗತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮಸಾಸಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಿದ್ದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಅವುಗಳ ಮಾನಗಳನ್ನು

ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಆಲೇಖಗಳ ಛೇದನವೆಂದುವಿನ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕಗಳೇ ಆವೃತ್ತಗಳ ಮಾನಗಳು.

೭.೧೮. ಇದೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿಯ ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ. ಪ. ೩ನೆಯದೊಳಗಿನ ವಸಂತರಾಯರ ಸಂಚಿತಫನದ ಮತ್ತು ಅವರಂತೆಯೇ ಪ. ೭ನೆಯದೊಳಗಿನ ವಿಕ್ರಾಸರಾಯರು ಕೂಡಿಸಿಬಿಟ್ಟ ಹಣದ, ಈ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಗಳ ಎಂಬೇ ಚೋಡಿಗೆ ಅನುಸರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವಾ.



ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೮.

ವಸಂತರಾಯರ ಶಿಲಕು

ಇಂದು
೨೦೦೦ ರೂ.

೪ ತಿಂಗಳಾದ ನಂತರ.
೨೮೦೦ ರೂ.

೧೦ ತಿಂಗಳಾದ ನಂತರ
೪೦೦೦ ರೂ.

ಅಮೃತಲಿಂಗ (೦, ೨೦೦೦), (೪, ೨೦೦೦), (೧೦, ೪೦೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ವಸಂತರಾಯರ ಸಂಚಿತ ಧನದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಅವರಂತೆಯೇ ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ತಿಲಕು

ಇಂದು ೪ ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ ೮ ತಿಂಗಳಾದ ಮೇಲೆ
 ೨೬೦೦ ರೂ. ೩೦೦೦ ರೂ. ೩೪೦೦ ರೂ.

ಅಮೃತಲಿಂಗ (೦, ೨೬೦೦), (೪, ೩೦೦೦), (೮, ೩೪೦೦)

ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೨, ೩೨೦೦) ಈ ಬಿಂದು-
 ದಿನಕ್ಕೆ ಛೇದಿಸಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ೬ ತಿಂಗಳುಗಳ
 ನಂತರ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿಯೂ ಅಷ್ಟೇ ಹಣವು ಕೂಡಿದ್ದಿರುವದು, ಮತ್ತು
 ಇದು ನಿಜವೇ. ೬ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ವಸಂತರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ
 (೨೦೦೦ + ೬ × ೨೦೦) ರೂ. ಅಂ. (೨೦೦೦ + ೧೨೦೦) ರೂ., ಅಂ.
 ೩೨೦೦ ರೂ. ಇರುವವು, ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿಯೂ
 (೨೬೦೦ + ೬ × ೧೦೦) ರೂ. ಅಂ. (೨೬೦೦ + ೬೦೦) ರೂ. ಅಂ. ೩೨೦೦
 ರೂ.ಗಳೇ ಇರುವವು.

ಈಗ ನಾವು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇನೆಂದರೆ ವಸಂತರಾಯರ ಏಷಯದಲ್ಲಿ
 ಸಂಚಿತ ಧನವು (ಸ) ಮತ್ತು ಕಾಲ (ಕ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು
 ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ ಈ ಸೂತ್ರವೂ, ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಾಸರಾಯರ
 ಏಷಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ಕ ಈ ಸೂತ್ರವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.
 ಅಂದರೆ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ಕ ಇದು ಮೊದಲನೇ ಅಲೇಖದ ಸಮೀಕರ-
 ಣವಿದ್ದು, ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ಕ ಇದು ಎರಡನೆಯದರದಿರುತ್ತವೆಂಬುದು
 ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಅಲೇಖದ ಮೇಲೆ (೦, ೨೦೦೦), (೪, ೨೪೦೦),
 (೧೦, ೪೦೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಕ = ೦, ೪, ೧೦,
 ಸ = ೨೦೦೦, ೨೪೦೦, ೪೦೦೦ ಈ ಕೂಡಿರುವ ಜೊತೆಗಳಿಂದ ಸ = ೨೦೦೦
 + ೨೦೦ಕ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂರ್ತತೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಅಲೇಖದ
 ಮೇಲೆ (೦, ೨೬೦೦), (೪, ೩೦೦೦), (೮, ೩೪೦೦) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದು

ಕ = ೦, ೪, ೮; ಸ = ೨೬೦೦, ೩೦೦೦, ೩೪೦೦, ಈ ಕೂಡಿರುವ ಬೆಲೆ-
ಗಳಿಂದ ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ ಕೆ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

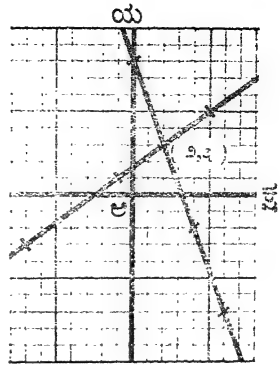
ಈಗ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು (೬, ೩೦೦೦) ಈ ಬಿಂದು-
ವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಕ = ೬; ಸ = ೩೨೦೦ ಈ
ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗಬೇಕು, ಮತ್ತು ಅದು
ಪಾಗೆ ಆಗೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕೆ ಈ ಸಮೀ-
ಕರಣದಲ್ಲಿ ಕ = ೬ ಇದ್ದಾಗ ಸ = ೨೦೦೦ + ೨೦೦ ಕೆ = ೨೨೦೦ ಇರು-
ವದು. ಮತ್ತು ಸ = ೨೬೦೦ + ೧೦೦ ಕೆ ಇವರಲ್ಲಿ ಕ = ೬ ಇದ್ದಾಗ ಸ =
೨೬೦೦ + ೧೦೦ × ೬ = ೨೬೦೦ + ೬೦೦ = ೩೨೦೦ ಇರುವದು.

೭.೧೯. ಏಕಘಾತ ದ್ವಿವರ್ಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ
ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಗಳು, ಯೋಗ ವಿಯೋಗ ರೀತಿ
ಉತ್ಥಾನವೆ ಇಲ್ಲವೆ ಅದೇಶರೀತಿ; ತುಲನರೀತಿ ಮತ್ತು ವಜ್ರಭ್ಯಾಸರೀತಿ
ಇಲ್ಲವೆ ಕತ್ತರಿಸು ನಿಯಮ, ನಮಗೆ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದದ್ದು. ಇದು
ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಲೇಖ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸುವುದು ಐವನೇ
ರೀತಿಯು—ಅಲೇಖರೀತಿಯು—ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿ-
ಯಿಂದ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾ. $೫x + ೨y =$
 ೧೬ , $೨x - ೩y + ೫ = ೦$ ಈ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. $೫x + ೨y = ೧೬$ ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವ-
ದಾದರೆ $x = ೦$, $೪, ೬$ ಇದ್ದಾಗ $y = ೮, -೨, -೭$ ಇರುವದು. ಆದ್ದ-
ರಿಗೆ ಅಕ್ಷವನ್ನು x ಅಕ್ಷವೆಂದು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷವನ್ನು y ಅಕ್ಷವೆಂದು ತಿಳಿದು (೦, ೮)
(೪, -೨) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು (೬, -೭)
ಒಳಗಿಂದಾದರೂ ಹೋಗುವದು. ಅದುದರಿಂದ ಇದು $೫x + ೩y = ೧೬$,
ಇದರ ಅಲೇಖವಾಯಿತು. ಈಗ $೨x - ೩y + ೫ = ೦$ ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು
ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ

$x = -೭, -೧, ೫$ ಇದ್ದಾಗ $y = -೩, ೧, ೫$ ಇರುವದು.
(-೭, -೩), (-೧, ೧), (೫, ೫) ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಯನ್ನು
ತೆಗೆದರೆ ಅದು $೨x - ೩y + ೫ = ೦$ ಇದರ ಅಲೇಖವಾಯಿತು.

ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಬಂದ-
ನ್ನೊಂದು (೨,೩) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ
ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ; ಅದುವರಿಂದ $ಕ್ಷ =$
೨; ಯ = ೩.

[ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ
 $ಕ್ಷ = ೦$ ಯ = ೩ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು
ಅವುಗಳ ಪೂರ್ಣಕತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು
ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅಕ್ಷ = ೦ ಯ = ೩
 $೫ \times ೦ + ೩ \times ೩ = ೧೦$; $೩ \times ೧೦ =$
 ೩೦ - ೩ಯ = ೦ $೩ \times ೩ = ೯$ $೩ \times ೩ = ೯$
 $೩ \times ೩ = ೯$ $೩ \times ೩ = ೯$ $೩ \times ೩ = ೯$]



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೫.

೭-೧೦. ಅಕ್ಷ-೦: ೭-೨ಕ್ಷ ಈ ಏಕಘಾತ ಏಕವಕ್ರ ಸಮೀಕರ-
ಣವನ್ನು ನಮಗೆ ದೊಡ್ಡವಾದವು ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಆದರೆ ಅವನ್ನು ಅಲೇಖ-
ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಪಡಿಸಲು ಬರುವದೇ? ನಿಜವಾಗಿ ಬರುವದು. ಏಕವರ್ಣ
ಏಕಘಾತ ರಾಶಿಗಳ (ಅದರೆಯೇ ಫಲಗಳ) ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ
ತೆಗೆಯುವವೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದರಂತೆ ಅಕ್ಷ ಅಕ್ಷವೆಂದು $ಕ್ಷ =$
ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷವೆಂದು ಫಲ — ಅಕ್ಷವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅಕ್ಷ-೦
ಮತ್ತು ೭-೨ಕ್ಷ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾ. ಅಕ್ಷ-೦
ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ $ಕ್ಷ = -೧, ೦, ೩$ ಇದ್ದಾಗ
 $ಅಕ್ಷ-೦ = -೯, -೫, ೭$ ಇರುವದು.

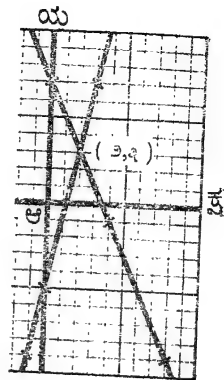
$\therefore (-೧, ೯), (೦, -೫), (೩, ೭)$ ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ
ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷ-೦ ಇದರ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಆದರಂತೆಯೇ ೭-೨ಕ್ಷ
ಇದರ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯುವದಾದರೆ,

$ಕ್ಷ = ೦, ೪, ೮$ ಇದ್ದಾಗ ೭-೨ಕ್ಷ = ೭, -೧, -೯ ಇರುವದು.

$\therefore (೦, ೭), (೪, -೧), (೮, -೯)$ ಇವುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ
ರೇಖೆಯು ೭-೨ಕ್ಷ ಇದರ ಅಲೇಖವಾಗುವದು.

ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು
(೨.೩) ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ.
ಅದರಲ್ಲಿ $k=1$, ಇಲ್ಲಿ ೩ ಇದು
ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಕ್ಕದ
ಬೆಲೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $k=1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ವತೆಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿ. $k=1$ ಇದ್ದಾಗ ಎಂಬುದಿಯು $k=1$ - $3 = 0 - 3 = -3$, ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯು $1 - 3 = -2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೩.

೨.೨೧. ಸ್ಪಷ್ಟ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಸಮಗ್ರ ಕಂಡುಬರುವುದು ಎಂದರೆ $k=1$ - $3 = 0 - 3 = -3$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ $k=1$ - 3 , $y = 1 - 3$ ಈ ಸಮಯಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ $k=1$ ದ ಮಾನವನ್ನು ತಿಳಿಯುವಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೂಲ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ರಿಂದ ತೋರಿಸಿದರೆ $y = k - 3 = 1 - 3$ ಹೀಗೆ ಆ ಸಮೀಕರಣವಾಗುವದು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ $y = k - 3$ ಮತ್ತು $y = 1 - 3$ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸಮಯಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೊರೆಯುವವು. $k=1$ ಈ ರೀತಿಯ ಅಲೇಖವೇ $y = k - 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಲೇಖವು, ಮತ್ತು $1 - 3$ ದ ಅಲೇಖವೇ $y = 1 - 3$ ದ ಅಲೇಖವು. ಮೇಲಿನ (ಕ್ರ. ೧೩) ಅಲೇಖದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರೆ ಈ ಸಂಗತಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವದು.

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

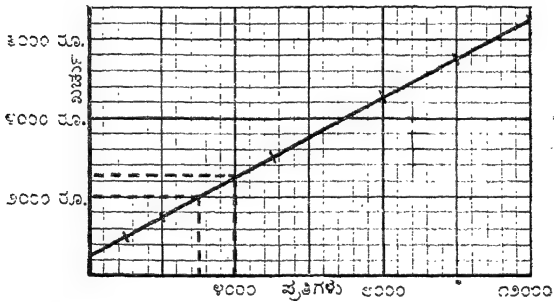
ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಲೇಖಗಳ ಸೂತ್ರದಿಂದ

- (೧) $ಅಕ್ಷ-೩ಯ = ೨$; $ಅಕ್ಷ+೫ಯ = ೨೧$.
 (೨) $೩ಕ್ಷ-೫ಯ = ೧೨$; $೩ಕ್ಷ+೨ಯ = ೧$.
 (೩) $೪ಯ+೨ರ = ೧೫$; $೪ಯ-೨ರ = ೧$.
 (೪) $೪ತ+೨ನ = ೫$; $೩ತ-೨ನ = ೦$.
 (೫) $೨ಯ-೫ರ = ೧೩$; $೩ಯ+೨ರ = ೧೧$.
 (೬) $೩ಯ-೩ವ = ೯$; $೫ಯ+೨ವ = ೧೬$.
 (೭) $೨ಪ+೫ಮ+೧೫ = ೦$; $೪ಪ-೩ಮ = ೯$.
 (೮) $ಯ = ೪ಕ್ಷ+೩$; $ಯ = ೩ಕ್ಷ+೫$.
 (೯) $೨ಪ+೧೨ಮ = ೫$; $೪ಪ-೧೨ಮ = ೨$.
 (೧೦) $೧೨ಯ+೧೨ಕ್ಷ = ೫$; $೧೨ಯ+೧೨ಕ್ಷ = ೫$.
 (೧೧) $೨ರ-೧೨ವ = ೫$; $೧೨ರ-೨ವ+೩ = ೦$.
 (೧೨) $೨ರ+೩ಸ-೫ = ೦$; $೩ರ-೫ಸ-೮ = ೦$.
 ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.
 (೧೩) $೪ಕ್ಷ-೩ = ೨ಕ್ಷ+೫$. (೧೪) $೩ವ+೨ = ೨-೩ವ$.
 (೧೫) $೨ರ-೨ = ೪-೨$ (೧೬) $೨-೫ಸ = ೮+೩ಸ$.
 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯು ಯಾವದಿದ್ದರೆ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ
 ರಾಶಿಗಳ (ಫಲಗಳ) ಬೆಲೆಗಳು ಸಮಾನವಿರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಆಲೇಖ-
 ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೇಳಿರಿ.
 (೧೭) $೫ಕ್ಷ-೩$ ಮತ್ತು $೧೪-೩೧೨ಕ್ಷ$.
 (೧೮) $೪ಪ-೯$ ಮತ್ತು $೨೭-೫$.
 (೧೯) $೩ಸ+೪$ ಮತ್ತು $೮ಸ+೫$.
 (೨೦) $೯ನ+೧೭$ ಮತ್ತು $೯-೧-೧೪ನ$.
 ೨

೨.೨೨. ಉ.೧. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ೧೦೦೦, ೨೦೦೦, ೫೦೦೦,
 ೮೦೦೦, ೧೦೦೦೦, ೧೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೧೦೦೦ ರೂ., ೧೫೦೦ ರೂ., ೨೦೦೦ ರೂ., ೨೫೦೦ ರೂ., ೩೦೦೦ ರೂ., ೩೫೦೦ ರೂ., ೪೦೦೦ ರೂ., ಹೀಗೆ ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಿಸುವ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬರುವದು ಮತ್ತು ೨೫೦೦ ರೂ. ವೆಚ್ಚ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಗಳು ಛಾಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ, ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಕ್ಷ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (೦'೨೫"=೧೦೦೦ ಪ್ರ.) ಮತ್ತು ಛಾಪಿಸುವ ಖರ್ಚನ್ನು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (೦'೨೫"=೧೦೦೦ರೂ.) ತೋರಿಸುವಾ. ಪ್ರತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಿಸುವ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ



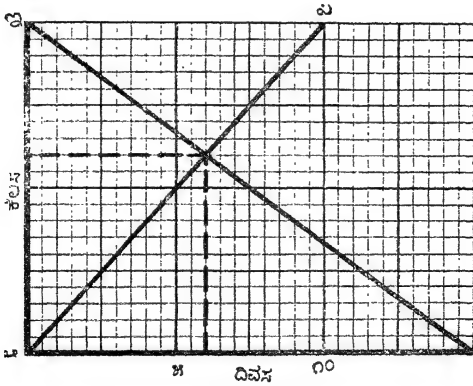
ಆಲೇಖ. ಕ್ರ. ೧೭.

ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಮಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ೨೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ೨೦೦೦ ರೂ. ಖರ್ಚು ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ೨೫೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ೪೦೦೦ ಪ್ರತಿಗಳು ಛಾಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಉ.೨. ಒಂದು ನೆಲವನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪಾಂಡುರಂಗನೊಬ್ಬನೇ ೧೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ರಾಮನು ೧೫

ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುವರು ?

ಅದ್ವ. ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಾಲ ೦. ೨" = ೧ ದಿವಸ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ೨" = ೧ ಕೆಲಸವನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ ಅಪ ಇದು ಪಾಡುರಂಗನ ಕೆಲಸದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ರಾಮನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದಾನೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ ಇರ ಇದು ರಾಮನ ಕೆಲಸದ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಈ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅವರ



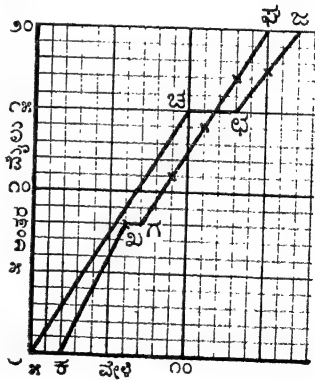
ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೮.

ಭುಜಾಂತರ ೬ ಇದ್ದುದರಿಂದ ೬ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಲೇಖ ಪತ್ರದ ಮೇಲೆ ಕಂಡು ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಪಾಡುರಂಗನು ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ೬ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದು ರಾಮನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ೬ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದಾನೆ, ಅಂದರೆ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಉ ೩. ಪ ಮತ್ತು ಬ ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳು ಒಂದರಿಂದ ಒಂದು ೨೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಕೃಷ್ಣನು ಪ ಊರಿ-

ನಿಂದ ಬೆಳಿಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೪ ಮೈಲಿನಂತೆ ೨ ತಾಸುಗಳ ವರೆಗೆ ನಡೆದನಂತರ ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೩ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಗೋವಿಂದನು ಅದೇ ಊರಿನಿಂದ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೩ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ೧೦ ಗಂಟೆಯ ವರೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಮುಂದೆ ಒಂದೂವರೆ ಗಂಟೆ ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದ ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಆ ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೇಟಿಯಾಗುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬೆಳಿಗೆ ೫ ಗಂಟೆಯ ನಂತರದ ಕಾಲವನ್ನು (೦.೨" = ೧ ತಾಸು) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪ ಊರಿನಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು (೦.೧"=೧ ಮೈ) ತೋರಿಸಿದರೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದು ಕೃಷ್ಣನ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಮತ್ತು ಅಚ್ಚುಪಟು ಇದು ಗೋವಿಂದನ ಪ್ರವಾಸದ ಆಲೇಖವಾಗುವದು. ಅವು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಬಿಂದುವು ೧೦ ಹೊಡೆದು ೫೦ ಮಿನಿಟುಗಳ ಕಾಲವನ್ನು ಮತ್ತು ಆರಂಭ-ಸ್ಥಾನದಿಂದ ೧೫ ಮೈಲುಗಳ

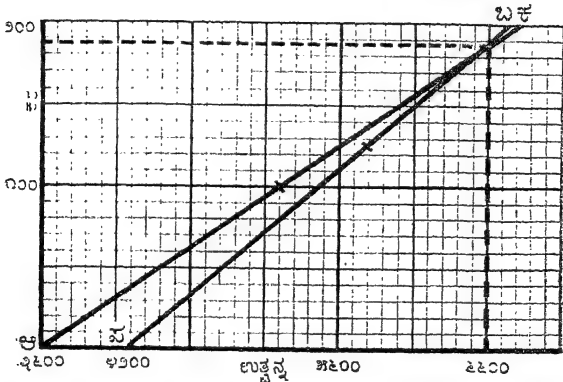


ಆಲೇಖ ಕ್ರ. ೧೯.

ಅಂತರವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಹತ್ತು ಹೊಡೆದು ೫೦ ಮಿನಿಟುಗಳ ನಂತರ ಪ ಊರಿನಿಂದ ೧೫ ಮೈ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭೇಟಿಯಾಗುವರು. ಉ.ಳ. ಮೊದಲನೇ ೩೬೦೦ ರೂ., ಗಳ ರಕಮಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ಸೂಟು-

ಸಿಕ್ಕು ಉಳಿದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗೆ ೧ ಅಣೆಯಂತೆ ಕರವು ಆಕರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಕರವು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತೋ ಅಷ್ಟೇ ಮೊದಲಿನ ೪೨೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ಸೂಟು-ಸಿಕ್ಕು ಉಳಿದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗೆ ೧ ಅಣೆಯಂತೆ ಕರವು ಆಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗಾದರೂ ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಷ್ಟು? ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಕರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

ಅದ್ದ ಅದ್ದ ಮೇಲೆ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (೧" = ೧೦೦೦ ರೂ.) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅದ್ದ ಮೇಲೆ ಕರವನ್ನು (೧" = ೧೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಕ

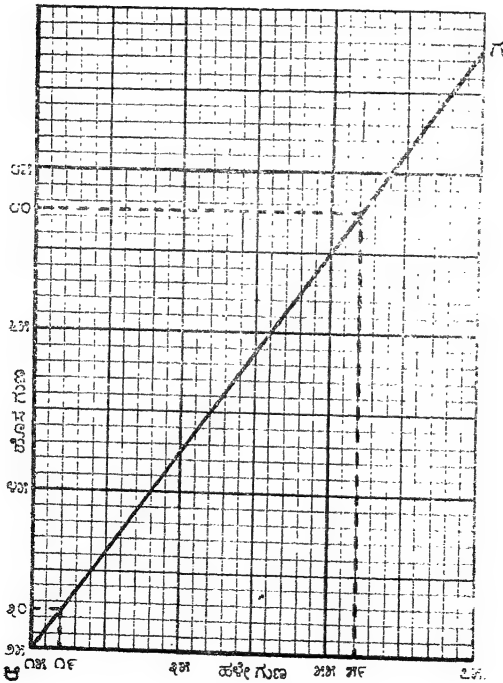


ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೦.

ಇದು ಕರವನ್ನು ಆಕರಿಸುವ ಹಳೇ ಪದ್ಧತಿಯ, ಮತ್ತು ಪೆಬ ಇದು ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿಯ ಅಲೇಖವಾಗುವದು. ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆಯೋ ಅದು ೬೬೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ೧೮೭೫ ರೂ. ಕರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉ. ಖ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೭೫ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕವು. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳು-

ವನನಿಗೆ ೧೫ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು. ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳು ೧೦೦ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣಗಳು ೨೫ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಎಲ್ಲ ಗುಣಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಈಗ ಕೊಡತಕ್ಕ ಗುಣಗಳು, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಮೊದಲು

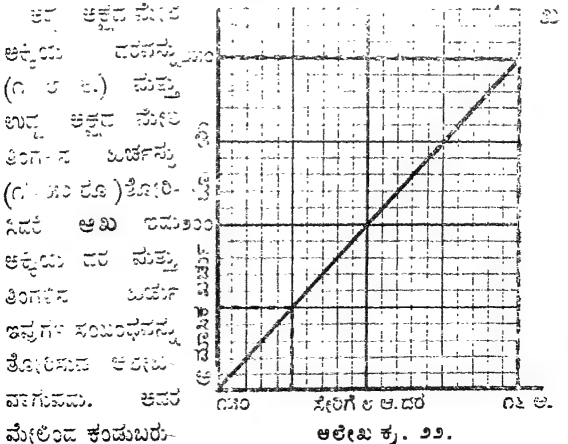


ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೦.

೧೯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದವನಿಗೆ ಈಗ ಎಷ್ಟು ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುವವೆಂಬುದನ್ನೂ ಮತ್ತು ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಗುಣಗಳು ದೊರೆತಿದ್ದವೆಂಬುದನ್ನೂ ಹೇಳಿರಿ.

ಅವ್ವ ಅಕ್ಕದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲನೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು (೧ = ೨೦) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಕದ ಮೇಲೆ ಈಗಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು (೧ = ೨೦) ತೋರಿಸಿದರೆ ಆಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿರುವ ಅಕ್ಷವಾಗುವದು. ಆದರೆ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ೧೯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದವನಿಗೆ ಈಗ ೩೦ ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುವವನು, ಮತ್ತು ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವವನಿಗೆ ಮೊದಲು ೫೯ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದ್ದವೆಂಬುದಾಗುವದು.

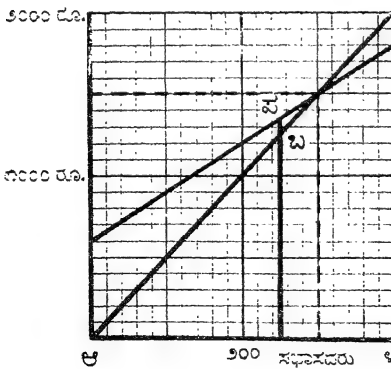
ಉ. ೩. ಅಕ್ಕಿಯು ಮತ್ತೆ ಸೇರಿಗೆ ೮ ಅಣಿ ಇದ್ದಾಗ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ೨೦೦ ರೂ. ಇತ್ತು ಮತ್ತು ೧೨ ಅಣಿ ಇದ್ದಾಗ ೨೫೦ ರೂ. ಇತ್ತು. ದರವು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಏರಿ ಅದು ಸೇರಿಗೆ ೧ ರೂ. ಆದರೆ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ಇರುವದು, ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ೧೭೫ ಇದ್ದಾಗ ದರವು ಎಷ್ಟಿತ್ತು?



ಸಿದ್ಧೇನೆಂದರೆ ದರವು ರೂ. ೮೦. ೧೩ ಅಣೆ ಇದ್ದಾಗ ಖರ್ಚು ೨೫ ರೂ. ೨೦ರವದು, ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ೧೦೦ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ದರವು ೪ ಅಣೆ ಇರುವದು.

ಉ. ೭. ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾಭವನದ ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು, ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೨೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೨೫೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೩೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಸಭಾಸದರ ತಿಂಗಳಿನ ಚಂದಾ ೧ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ಭವನಕ್ಕೆ ಏನೂ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರದೆಂದು ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (೧ = ೨೦೦೦) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು (೧ = ೧೦೦೦ ರೂ.) ತೋರಿಸಿದರೆ ಕೃಷಿ ಈ ರೇಖೆಯು ತಿಂಗಳಿನ ಖರ್ಚಿನ ಅಲೇಖವಾಗುವದು, ಮತ್ತು ಸಭಾಸದರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೨೦೦ ಇದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ೧೦೦೦, ಮತ್ತು ೪೦೦ ಇದ್ದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನವು ೨೦೦೦ ರೂ. ಇದ್ದುದರಿಂದ ಆಖ ಈ ರೇಖೆಯು ಉತ್ಪ-



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೩.

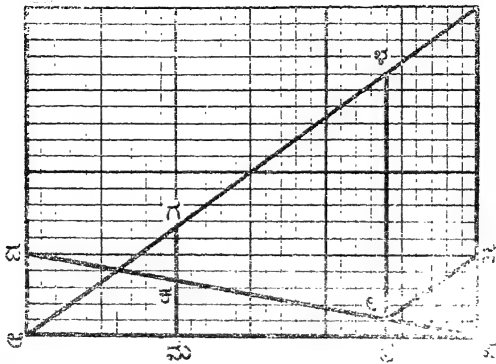
ಉತ್ಪನ್ನ ಅಲೇಖವಿರುವದು. ಈ ಎರಡೂ ಅಲೇಖಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವೋ ಅದು ೨೦೦ ಸಭಾಸದರು ಮತ್ತು ೧೦೦೦ ರೂ. ಇವುಗಳ ಸಿದ್ಧೇಶಕವಿರುವದು. ಇದರ

ಅರ್ಧವೇನೆಂದರೆ ೨೦೦ ಸಭಾಸದರು ಇವ್ವಾಗ ೧೫೦ ರೂ., ಏರ್ಪಡ ತಗಲುವದು, ಮತ್ತು ಉಕ್ತವನ್ನಾವರೂ ಅಷ್ಟೇ ಇರುವದು. ಆದುದರಿಂದ ಭವನಕ್ಕೆ ಏನೂ ಹಾನಿಯಾಗಬಾರವೆಂದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ ೨೦೦ ಸಭಾಸದರು ಇರಲೇಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಭಾಸದರಿಲ್ಲದೆ ಹಾನಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ೨೦೦ ಸಭಾಸದರಿವ್ವಾಗ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೦೦ ರೂ., ಹಾನಿಯನ್ನು ಸಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆರ್ಥಬಲತ್ರವ ಮೇಲ ಪಬ ಈ ರೇಷೆಯು ಈ ಹಾನಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಉ. ಲ. ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ದಿನಾಲುಳ ರೂ., ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಕರಾರಿನ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ನೇಮಿಸಿದೆ. ಅವನು ಒಂದು ದಿನಸ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಬಾರದಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೧ ರೂ., ದಂಡವಾಗತಕ್ಕದ್ದು. ೩೦ ದಿನಗಳ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ದಂಡದಹಣ ಕಳೆಯಲಾಗಿ, ೯೦ ರೂ. ದೊರೆತರೆ, ಅವನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಕೆಲಸಕ್ಕಿದ್ದನು ?

ಅಡ್ಡ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ದಿನಸಗಳನ್ನು (೦.೧" = ೧ ದಿನಸ) ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು (೦.೧" = ೬ರೂ.) ಆಪೆ ಈ ರೇಷೆಯು ಹೇಗೆ ಅವನು ೩೦ ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಹಾಜರಿವಿದ್ದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅದರಂತೆ ಪಅ ಈ ರೇಷೆಯು ಅವನು ೩೦ ದಿನಸಗಳ ವರೆಗೆ ಹೊರ ಇಲ್ಲದೆ ಇರುವದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದ ಈ ರೇಷೆಯು ೨೦ ರೂ. ದಂಡವನ್ನು ತೋರಿಸುವದು ಮತ್ತು ಪದ ಇದು ದಂಡದ ಆರ್ಥಬಲವಾಗುವದು. ಅದು ರೇಷೆಯು ಅ ಮನುಷ್ಯನು ಮಾಡಿದ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ ಮಗ ರೇಷೆಯು ಅವನು ಮಾಡಿದದ್ದೇ ಇದ್ದ ದಿನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮನ ಅವನ ಸಂಬಳವಿರುವದು. ಮತ್ತು ಮಕ ಇದು ಅವನಿಂದ ವಸೂಲಿ ಆಗತಕ್ಕಂಥ ದಂಡವಿರುವದು ಮತ್ತು ಕಗ ಇದು ದಂಡದ ಹೊಣನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಅವನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಬೀಳುವ ಹಣವಿರುವದು. ಎರಡು ಆರ್ಥಬಲಗಳೊಳಗಿನ ಉದ್ದ ಅಂತರವಿರುವ ದಂಡವನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿ ಅ ಮನುಷ್ಯನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಬೀಳುವ ಹಣವು ಇರುವದು. ಈಗ ಆ ಎರಡು ಆರ್ಥಬಲಗಳೊಳಗಿನ ಉದ್ದ ಅಂತರವು, (ಕೊಟ್ಟೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು) ೯೦ ಯಾವಾಗ ಇರುವದಿರುವದನ್ನು ನೋಡು-

ಬೇಕು. ಅಕ್ಕತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸವ ಈ ೯೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು ತೋರಿ-
ಸುವ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಸ ದಿಂದ ವಅ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆ-



ಅಲೇಖ ಕ್ರ. ೨೪

ದರೆ ಮತ್ತು ಅದು ಪದಕ್ಕೆ ಲ ದಲ್ಲಿ ಕೂಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ಲಳ = ಸವ = ೯೦ ರೂ.
ಮತ್ತು ಅತ = ೨೪ ದಿನಗಳೆ. ಅದರಿಂದ ಆ ಮನುಷ್ಯನು ೨೪ ದಿನಗಳ-
ವರೆಗೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಿದನೆಂಬುದು ಉತ್ತರ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

[ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸ-
ತಕ್ಕದ್ದಿವೆ.]

೧. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನಿಗೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ೧೨೦ ರೂ. ಸಂಬಳ ಮತ್ತು
ಯಾವ ದಿನಸ ಅವನಿಗೆ ದಿನದಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ
ಅಂದು ಅವನಿಗೆ ೩ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುವವು. ಅವನ ತಿಂಗಳ ವರ್ಜು
೧೫೦ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ದಿನಗಳು ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ
ಶೇಕು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ
ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹುಡುಕಿ
ತೆಗೆಯಿರಿ.

(ಅ). ೨೫ ದಿನದ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ನಿರ್ವಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

(ಆ). ೧೫ ರೂ. ಶಿಲಕು ಇದ್ದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸದ ದಿನಗಳಿವು ?

(ಇ). ಕೂಡಿಸಿಟ್ಟ ಹಣದೊಳಗಿಂದ ೧೫ ರೂ. ತೆಗೆದುಬೇಕಾದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸವು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ?

(ಈ). ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಬರ್ಚು ಇವು ಸರಿಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೆಲಸ ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು ?

೨. ಅಕ್ಕಿಯ ದರವು ರೂ.ಗೆ ಒಂದೂವರೆ ಸೇರು ಇದ್ದು ಗೋದಿಯ ದರವು ರೂ.ಗೆ ಎರಡೂವರೆ ಸೇರು ಇದ್ದಾಗ ಅಕ್ಕಿ ಮತ್ತು ಗೋದಿ ಇವುಗಳ ವಿನಿಮಯದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ೨೦ ಸೇರು ಗೋದಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಷ್ಟು ಸೇರು ಅಕ್ಕಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ೧೫ ಸೇರು ಅಕ್ಕಿ ಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಗೋದಿಯನ್ನೂ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೩. ಒಂದರಿಂದೊಂದು ೨೧ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ೮ ಮತ್ತು ೭ ಈ ಎರಡು ಊರುಗಳಿಂದ ರಾಮ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಒಬ್ಬರಿಗೊಬ್ಬರು ಭೇಟಿಯಾಗುವದಕ್ಕಾಗಿ ಹೊರಡುತ್ತಾರೆ. ರಾಮನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೫ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವನ ತಾಸಿನ ಸರಾಸರಿ ನಡಿಗೆಯು ೩ ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ೫|| ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ಅವನ ತಾಸಿನ ನಡಿಗೆಯು ೩|| ಮೈಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭೇಟಿಯಾಗುವರು ಎನ್ನುವುದನ್ನು, ಅವರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಿ. ೭|| ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುವದು ? ೧೩ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರವಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆ ಅಗಿರುವದು ?

೪. ವಸಂತನು ಸಾಯಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ತಾಸುಗಳನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ಪಡೆದು ಮುಂದೆ ಆಮೈಲು ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಸಹೋದರನಾದ ಅರವಿಂದನು ಹಿಂದಿನಿಂದ ಮೋಟಾರ ಸಾಯಕಲ್ಲಿನಿಂದ ೯ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ಸರಾಸರಿ ೨೪ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ

ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಿ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುವೆಂಬುದನ್ನು ಅವರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹೇಳಿರಿ. ೧೦ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುವದು ? ೧೬ ಮೈಲು ಅಂತರವಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಯಾಗಿರುವದು ?

೫. ಬಸಪ್ಪನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಮಿಂದ ಹೊರಟು ತಾನಿಗೆ ಅಮ್ಮಲುಗಳ ಸಡಿಲೆಯಿಂದ ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಒಂದೂವರೆ ತಾಸುಗಳ ಸಂತರ ಅರ್ಧ ತಾಸು ವಿರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ತಿಮ್ಮಪ್ಪನು ಹಿಂದಿನಿಂದ ಸಾಯಕ್ಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ೯ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ಅವನಿಗೆ ೧೧ ಗಂಟೆಗೆ ಭಿಟ್ಟಿಯಾಗುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ತಿಮ್ಮಪ್ಪನು ತಾನಿಗೆ ಯಾವ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಾನೆಯೆಂಬುದನ್ನೂ, ೧೦ ಗಂಟೆಗೆ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನೂ, ಮತ್ತು ಎರಡು ಮೈಲು ಅಂತರವಿದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೬. ಎರಡು ಪರಿಫವು ವ್ಯಾಸವನ್ನಿ ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನಿಯಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೧೩ ಇಂಚು, ಮತ್ತು ೩೨ ಮತ್ತು ೪೩ ಇಂಚು ವ್ಯಾಸಗಳಿರುವ ಎರಡುಗಳ ಪರಿಫಗಳನ್ನೂ, ಮತ್ತು ೧೬೨ ಇಂ. ೨೨ ಇಂ. ಮತ್ತು ೩೩ ಇಂ. ಪರಿಫಗಳುಳ್ಳ ಎರಡುಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೭. ಫರನಾಹೀಟೆ ಬುಕ್ಲತಾಮಾವಕದಲ್ಲಿ ಹೆಪ್ಪುಗಟ್ಟುವ ಬಿಂದುವು ೩೨ ಮತ್ತು ಕುದಿಯುವ ಬಿಂದುವು ೨೧೨ ಇದ್ದು ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ್ ಬುಕ್ಲತಾಮಾವಕದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ೦, ಮತ್ತು ೧೦೦ ಇರುತ್ತವೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಎರಡೂ ಬುಕ್ಲತಾಮಾವಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಬುಕ್ಲತಾಮಾನಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ರೂಪಾಂತರಾಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ೬೮°ಫ, ೮೬°ಫ, ೧೪೦°ಫ. ಗಳ ಸೆಂಟಿಗ್ರೇಡ್ ಬುಕ್ಲತಾಮಾವಕದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ೧೦°ಸೆ, ೪೦°ಸೆ, ೫೦°ಸೆ, ಗಳ ಫರನಾಹೀಟೆ-ನಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಮಾಡುವವನಿಗೆ ದಿನಾಲು ೨|| ರೂ. ಸಂಬಳ ಕೊಡುವ, ಮತ್ತು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರದೇ ಇದ್ದ ದಿನಕ್ಕೆ ೪೮. ದೊಡ್ಡ, ಈ ಕರಾರಿನ

ಮೇಲೆ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಉಂ ದಿನಗಳ ಸಂತರ ಅವನಿಗೆ ೭೮ ರೂ. ಗಳು ಮೊರೆತರೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳ ವರೆಗೆ ಕೆಲಸದ ಮೇಲಿದ್ದನು ?

೯. ರಾಮನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ೨೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನು ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ೩೦ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುವರು ?

೧೦. ಒಂದು ಹೌದು, ನೀರನ್ನು ಒಳಗೆ ಸುರಿಸುವ ನಳದ ಬಾಯಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ೧ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ನೀರನ್ನು ಹೊರಗೆ ಬಿಡುವ ಬಾಯಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ೧ ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ತೆರವಾಗುತ್ತದೆ; ಅದರಿ ಎರಡೂ ನಳಗಳ ಬಾಯಿಗಳನ್ನು ತೆರೆದರೆ ಆ ಹೌದು ಎಷ್ಟು ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬುವದು ?

೧೧. ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೮೫ ಗುಣಗಳು ಮೊರೆತವು, ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ೧೫ ಗುಣಗಳು ಸಿಕ್ಕುವು. ಮೊದಲನೇ ಕ್ರಮಾಂಕದ ಗುಣಗಳು ೯೫ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದು ೨೦ ಇರುವಂತೆ ಬದಲಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಮೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಮತ್ತು ಮೊಸ ಗುಣಗಳು ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಯಾವನಿಗೆ ೨೫ ಗುಣಗಳು ಮೊರೆತಿರುವವೋ ಅವನಿಗೆ ಈಗ ಎಷ್ಟು ಮೊರೆಯುವವು, ಮತ್ತು ಯಾವನಿಗೆ ಈಗ ೮೦ ಗುಣಗಳು ಮೊರೆಯುವವೋ ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಮೊರೆತಿರುವುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೨. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ೧೦೦೦ ಪುಟಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸುವವಕ್ಕೆ ೪೦೦ ರೂ. ಏರ್ಪು ತಗಲುತ್ತದೆ, ೨೦೦೦ ಪುಟಗಳಿಗೆ ೬೦೦ ರೂ. ಮತ್ತು ೫೦೦೦ ಪುಟಗಳಿಗೆ ೧೨೦೦ ರೂ. ಏರ್ಪು ತಗಲುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪುಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಣದ ವೆಚ್ಚ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅಲೇಖವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ೩೦೦೦ ಪುಟಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಏರ್ಪು ತಗಲುವದು ಮತ್ತು ೧೬೦೦ ರೂ. ಏರ್ಪು ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಪುಟಗಳನ್ನು ಛಾಪಿಸಿದ್ದಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೧೩. ಒಂದು ವಸತಿಗೃಹದ ತಿಂಗಳಿನ ಏರ್ಪು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ೪೦ ಇದ್ದಾಗ, ೧೨೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ೬೦ ಇದ್ದಾಗ ೧೩೦೦ ರೂ.

ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಬಿರ್ಜು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯಿಸಿ, ಮತ್ತು ೨೫ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾಗ ಬಿರ್ಜು ಎಷ್ಟು ಬರುವದು, ಮತ್ತು ಬಿರ್ಜು ೧೪೫೦ ರೂ. ಇದ್ದಾಗ ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟಿರುವರೆಯಾದನ್ನು ಹೇಳಿ. ವಸತಿಗೃಹದ ತಿಂಗಳಿನ ಅಕರಣೆಯು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ೫ ರೂ. ಇದ್ದರೆ ವಾಸಿಯಾಗಬಾರವೆಂದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆಯೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿವರಾರ್ಥಿಗಳಿರಬೇಕು?

೧೪. ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳಿನ ಬಿರ್ಜು ಮನೆಯಲ್ಲಿ ೮ ಜನರು ಇದ್ದಾಗ ೬೦೦ ರೂ. ಇರುವದು, ೨ ಜನರು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ೬೫೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಕುಟುಂಬದೊಳಗಿನ ಒಬ್ಬನು ಹೇಗೆ ಊರಿಗೆ ಹೋದಾಗ ೧೪೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕುಟುಂಬದೊಳಗಿನ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳಿನ ಬಿರ್ಜು ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯಿಸಿ, ಮತ್ತು ಆದರ ಮೇಲಿಂದ ೫ ಜನರಿಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಬಿರ್ಜು ಬರುವದು ಮತ್ತು ೬೮೦ ರೂ. ಬಿರ್ಜು ಬಂದಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಜನರಿರುವರೆಯಾದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೧೫. ಒಬ್ಬ ಅಧಿಕಾರಿಯ ತಿಂಗಳಿನ ಪಗಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಬದಲಿಯಾಗುತ್ತಿದ್ದು ೬ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ಉಂಟು ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ೧೦ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ಅದು ೬೦೦ ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನೌಕರಿಯ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ಅವನ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಆದರ ಮೇಲಿಂದ ೪ ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಬಳ ದೊರೆಯುವದು, ಮತ್ತು ೭೨೦ ರೂ. ಸಂಬಳ ದೊರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ನೌಕರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿ.

೧೬. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಸ್ಥನು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨ ರೂ. ದರದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಮತ್ತು ರತ್ನಲಿಗೆ ೨|| ದರದ ಕೆಲವಷ್ಟು ಹೀಗೆ ೧೦೦ ರತ್ನಲು ಚಹವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಆದರ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯು ೨೨೦ ರೂ. ಆಯಿತು. ಏಕೆಂದರೆ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಚಹವನ್ನು ಎಷ್ಟು ತೆಗೆದು

ಪರೀಕ್ಷಾತ್ಮಕ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಗಳು

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ ನೆಯದು

೧. ಯ^೨ + ಯ^೨ — ೧೫ಯ^೨ — ೨೫ಯ^೨ + ೧೪ಯ^೨ + ಕ ಇದಕ್ಕೆ
ಯ — ೪ ರಿಂದ ನೀರ್ವೇಷ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಕ = ? ಮತ್ತು ರಾಶಿಗಳ
ಅವಯವಗಳಾವವು ?

೨. ಎರಡು ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ೪ಯ^೨ — ೪ಯ^೨ — ೨೫ಯ^೨ +
೧೫೪ಯ^೨ — ೧೫೪ಯ^೨ + ೨೦ ಇದ್ದು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ ೨ಯ — ೧
ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳೆ ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಯನ್ನು ಹೇಳಿರಿ :

೩. ಸರಳರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

$$(ಅ) \quad \frac{ಕ^೨ + ಗ^೨ + ಫ^೨}{(ಗ-ಫ)^೨ + (ಫ-ಕ)^೨ + (ಕ-ಗ)^೨}$$

$$(ಆ) \quad \frac{ಪ^೨ - ಪ^೨ಮ - ಪಮ^೨ + ಮ^೨}{ಪ^೨ - ಪ^೨ಮ - ಪಮ^೨ + ಮ^೨}$$

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \quad \frac{ನ+೧೨}{೫} - \frac{೨೧}{೪} - \frac{ನ+೫}{೪} = \frac{ನ}{೨} - \left(\frac{ನ+೧}{೪} \right)$$

$$(ಆ) \quad \frac{೨ಯ+೨೨}{೧೨} = \frac{೨೨-೨ಯ}{೫} = ೨$$

೫. ೨೫ ರೂ. ಯ ಆ. ೬ ಪೈಗಳಿರುವ ಚೀಲದೊಳಗಿಂದ ೧೮ ರೂ.
(ಯ + ೪)ಆ. ೯ ಪೈಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಉಳಿಯುವದು ?

೬. ಪ = ಯ — $\frac{೧}{೨}$ ಮತ್ತು ಮ = ಯ — $\frac{೧}{೨}$ ಇದ್ದರೆ
ಮ^೨ — ೪ಪ^೨ = ಪ^೨ ಎಂದು ಸಿಪ್ಪೆ ಮಾಡಿರಿ.

೭. ಆ ಲೇಖನವನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$೫ಕ್ಷ + ೪ಯ = ೨೨, \quad \frac{ಕ್ಷ}{೪} + \frac{ಯ}{೬} = ೧$$

೮. ಅಂಶದೊಳಗಿಂದ ೩ ಕಳೆದರೆ ಬೆಲೆಯು ೩ ಮತ್ತು ಭೇದದಲ್ಲಿ ೨ ಕೂಡಿ-
ಸಿದರೆ ೩ ಅಗುವಂಥ ಅಮೂಲಾಂಕವು ಯಾವುದು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ ನೆಯದು

೧. (ಅ) ಪ + ಬ + ಮ = ೬ ಮತ್ತು ಮ + ಬ + ಪ = ೧೪ ಇದ್ದರೆ,
ಪ + ಬ + ಮ = ?

(ಆ) ಯ + ರ + ಲ = ೦ ಮತ್ತು ಯ + ರ + ಲ = - ೨ ಇದ್ದರೆ
ಯ + ರ + ಲ = ?

೨. ೫ಯು — ೨೩ಯು — ೧೦ಯು — ೭ಯು + ೪೫ ಇದ್ದೊಳಗಿಂದ
ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಯ — ೫ ರಿಂದ ಭಾಗ
ಹೋಗುವದಿಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಅವಶೇಷಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.
೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(ಅ) \left(\frac{೧}{೧-ಯ} - \frac{ಯ}{೧-ಯು} \right) \div \left(\frac{೧}{೧+ಯ} + \frac{ಯ}{೧-ಯು} \right).$$

$$(ಆ) \frac{೧}{೩ + \frac{೨}{ಯ-೧}} \times \frac{೧}{ಯ-೩ + \frac{೧}{೩ + \frac{೨}{ಯ-೧}}}$$

೪. ೩೨ಯು + ೧೦೦ಯು — ೩ಯು — ೪೫ ಮತ್ತು ೩೨ಯು +
೮೨ಯು — ೫೭ಯು — ೪೫ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ.
ಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಿರಿ.

೫. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{೩ಯು-೭೩}{೫} + \frac{೪ಯ+೯೩}{೩} = \frac{೯ಯು+೩೩}{೧೫} - \frac{೮ಯ-೩}{೯}$$

$$(ಆ) \frac{ಯ-೮}{೪} + \frac{ಯ+೮}{೫} = ೪೧; \frac{ಯ-೮}{೫} - \frac{ಯ+೮}{೧}$$

೬. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $೬೦೦ + ೧೨೦೦ + ೬೦ - ೫೦ - ೫೦ - ೬$.

(ಆ) $(೦ + ೨) + (೦ - ೫) + ೨(೧ - ೦)$.

(ಇ) $೬೦೦ - ೪೨೦ + ೨೬೦$.

೭. ರಾಜಾಜ್ಞೆ ಬೆಳಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ತನ್ನ ಮನೆಯಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳ ಸಡಿಗೆಯಿಂದ ೧೨ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ತರುವಾಯ ೮ ಗಂಟೆಗೆ ಅವನ ತಮ್ಮನಾದ ಗೋಪಾಲನು ನಾಯಕನಿಗೆ ಮೇಲೆ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಅದೇ ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ತನೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ಅವರು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ಮನೆಯಿಂದ ಬಂದು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಭಿಕ್ಷೆಯಾಗುವರೆಯಾದವು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಎರಡು ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವೇ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿ ಮುರಗಿ ಬರೆಯುವವರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ವೇರಿಯು ೧೮ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವರೊಳಗಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಶೇಷವು ೪೫ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಯಾವುದು.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ನೆಯದು

೧. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) $೦೦ + ೨೦೦ - ೫೦ - ೧೫೦ + ೪೦ + ೧೦$.

(ಆ) $(೦ + ೦ + ೨)(೦ + ೦ + ೨) - ೨$.

(ಇ) $೨(೦ - ೦) - ೦(೦ - ೦) - ೦(೦ - ೦)$.

೨. $೦೦ - ೧೦೦ + ೨$ ಮತ್ತು $೨೦ - ೨೦ + ೨$ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಯು-೨ ಇದ್ದರೆ ಅ= ? ಕ= ?

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(೧ - \frac{ಮ}{ಪ}) (೧ + \frac{ಪ}{ಮ}) \div \frac{೧}{ಮ} + \frac{೧}{ಪ}$$

$$(೨) \frac{ಪ}{ಮ} + \frac{ಮ}{ಪ} \div \frac{೧}{ಮ} + \frac{೧}{ಪ}$$

$$(ಅ) \frac{\frac{ಪ-ಬ}{ಪ} - \frac{ಪ+ಬ}{ಬ}}{ಪ-ಬ-\frac{ಪ+ಬ}{ಪ}} = \frac{ಪ+ಬ}{ಪ-ಬ}$$

ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{೧೦೦೦-೬}{೬} + \frac{೬(೧೦೦೦-೧)}{೬}$$

$$= \frac{೧೦೦೦-೬}{೬} + \frac{೬೦೦೦-೬}{೬}$$

$$(ಅ) ೧೦\left(\frac{೧}{೧೦} - \frac{೧}{೧೦}\right) = ೦; ೧೦\left(\frac{೧}{೧೦} + \frac{೧}{೧೦}\right) + ೧೦ = ೦.$$

೫. ಕ+ಗ+ಘ=೧, ಕ೨+ಗ೨+ಘ೨=೨೧ ಮತ್ತು ಕಗಘ=೮
ಇದ್ದರೆ ಕ೨+ಗ೨+ಘ೨=? ಮತ್ತು (ಕ+ಗ)(ಗ+ಘ)(ಘ+ಕ)=?

೬. ಪರಿಘಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠ-
ಫಲವು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯಮದ ಮೇಲಿಂದ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ (ಪ)
ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ (ತ್ರಿ) ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ
ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ ಮೇಲಿಂದ ೨೧ ಇಂ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ
ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲವನ್ನೂ ಮತ್ತು ೨೪೬೪ ಚೌ. ಇಂ. ಪೃಷ್ಠಫಲವುಳ್ಳ
ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಹೇಳಿರಿ :

$$(ಗ = \frac{೨೨}{೬})$$

೭. ಒಬ್ಬ ಸಾಯಕಲಾಸವಾರನು ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ೬ ಗಂಟೆಗೆ ೨ ಊರಿ-
ನಿಂದ ತಾಸಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ಅಂತರದ ಮೇಲಿ-
ರುವ ಬ ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಹೊರಡುತ್ತಾನೆ, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ೧೦ ಮೈಲುಗಳ
ಪ್ರವಾಸದ ನಂತರ ಅರ್ಧತಾಸು ವಿಶ್ರಾಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ.
೯ ಗಂಟೆಗೆ ಬ ಊರಿನಿಂದ ೨ ಊರಿನ ಕಡೆಗೆ ಬರಲು ಹೊರಟ ಬೇರೊಬ್ಬ
ಪ್ರವಾಸಿಗನು ತಾಸಿಗೆ ೩೦ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಮೋಟಾರಿನಿಂದ ಹೊರಡು-
ತ್ತಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸಗಳ ಆರಂಭಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ
ಎಲ್ಲಿ ಭೇಟಿಯಾಗುವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಗವಳಿಗನು ೬೦೦೦ ರೂ. ಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಆಕಳುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಆಕಳುಗಳ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ೫೦ ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ೬ ಆಕಳುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುತ್ತಿದ್ದವು ಮತ್ತು ೫೦ ರೂ. ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ ೪ ಆಕಳುಗಳು ಕಡಿಮೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಕಳಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೪ ನೆಯದು

೧. ಗುಣಪ್ರತ್ಯಕ್ಷರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

$$(ಅ) ಬ(ಮ-ಪ)^2 - ಮ(ಪ-ಬ)^2 - ಪ(ಬ-ಮ)^2$$

$$(ಆ) ಪ^2 - ಬ^2 - ಮ^2 + ೨ಬಮ - ಪ + ಬ + ಮ.$$

$$(ಇ) \frac{ಯ^2}{ಆ^2} + \frac{ಆ^2}{ಯ^2} + ೧.$$

೨. $ಯ^2 + ೫ಯ^2 + ಆಯ - ೩ಕ$ ಮತ್ತು $ಯ^2 - ೩ಯ^2 + ೨೨ಆಯ + ೧೪ಕ$ ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ವಿ. ಯ-೨ ಇದ್ದರೆ, ಆ=? ಕ=?

೩. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(ಅ) \left(೧ - \frac{೧}{ಯ-೧} \right) \left(ಯ-೨ + \frac{೧}{ಯ} \right)$$

$$\times \frac{\left(\frac{೧}{ಯ-೨} \right)^2 - ಯ+೨}{೧ + \frac{೧}{ಯ-೨}} \div \left(ಯ-೧ + \frac{೧}{ಯ-೨} \right).$$

$$(ಆ) \frac{ಯ+ಪ}{(ಪ-ಮ)(ಯ+ಮ)} + \frac{ಯ+ಮ}{(ಪ-ಮ)(ಯ+ಪ)} - \frac{ಪ-ಮ}{(ಯ+ಪ)(ಯ+ಮ)}$$

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{೧}{೪} \left(ಸ + \frac{೧}{೮} \right) - \frac{೧}{೩} \left(ಸ - \frac{೪}{೫} \right) = \frac{೧೩}{೪೦}.$$

$$(ಆ) \frac{೧೫}{ಯ+೪} + \frac{೧೩}{ಯ-೪} = ೧೭;$$

$$\frac{೯}{ಯ+೪} - \frac{೨}{ಯ-೪} = ೧.$$

೫. (ಆ) $ಯ + \frac{೧}{ಯ} = ೫$ ಇದ್ದರೆ $ಯ^೪ + \frac{೧}{ಯ^೪} =$
 $೫^೪ - ೪೫ + ೨$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$(ಆ) ಯ + \frac{೧}{ಯ} = \frac{೧೦}{೨} \text{ ಇದ್ದರೆ } ಯ^೪ + \frac{೧}{ಯ^೪} = ?$$

೬. ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಅಂತರವು ೫ ಇದ್ದು ಅವುಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೋಷವು ೧೪೩ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

೭. (೦, ೫) ಮತ್ತು (೩, -೭) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು (೫, ೦) ಮತ್ತು (-೭, ೩) ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿಂದ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಿ ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೮. ಒಂದು ಊರಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಊರಿಗೆ ಹೋಗಲು ಒಂದು ಉಗಿ-ಬಂಡಿಗೆ ಅದರ ನಿತ್ಯದ ವೇಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವೇಳೆಯು ತಗಲುತ್ತದೆಯೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ತಾನಿಗೆ ೧೦ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ೨|| ತಾಸುಗಳು ಕಡಿಮೆ ತಗಲುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ೫ ಮೈಲುಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ನಿತ್ಯದ ವೇಗಿಗಿಂತ ಎರಡು ತಾಸುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಊರೊಳಗಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ ನೆಯದು

೧. ಪ ಮತ್ತು ಬ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ. ವಿ. ಅ ಮತ್ತು
 ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಕ ಗಳದ್ದು $ಪ + ಬ = ಅ + ಕ$ ಇದ್ದರೆ,
 $ಪ^೪ + ಬ^೪ = ಅ^೪ + ಕ^೪$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೨. ಗುಣಪ್ಯಥಕ್ಕುರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

$$(ಆ) ೧೫ಯ^೪ - ೩೭ಯ^೪ + ೧೩ಯ + ೪.$$

$$(ಅ) ಅಯಿ + ೧ + ೨೨ಯಿ$$

$$(ಬಿ) ಯುರ - ರಯಿ.$$

೨. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) ೨(೨ನ-೫) - ೨(೨ನ+೫) = ೨(೫ನ+೨) + ೨(೨ನ-೫).$$

$$(ಆ) (ಯ-೨)(೨+೪) = ಯರ+೨; (ಯ+೨)(೨-೪) = ಯರ-೨.$$

೪. ಸರಳ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ :

$$(ಅ) (ಯ-೫)(ಯ+೪) + (ಯ-೪)(ಯ-೫) - ಯ-೧೨$$

$$(ಆ) \frac{ಪ(ಬಿ-೨ಮಿ)}{ಬಮ} - \frac{ಬ(ಪಿ-ಮಿ)}{ಪಮ} + \frac{೨ಮ(ಪಿ-ಬಿ)}{ಪಬ}$$

೫. (ಅ) ಯಿ - (ಕಿ - ಕ - ಗ) ಯಿ - (ಕ - ಗ) ಕಿಯ + ಕಿಗ ಕೈ
ಯಿ + ಅಯ + ಕ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

(ಆ) ಯ=ಬ-ಮ, ರ=ಮ-ಪ, ಸ=ಪ-ಬ ಇದ್ದರೆ ಯಿ + ರಿ +
ಸಿ + ಯರ + ರಸ + ಸಯ = ಪಿ + ಬಿ + ಮಿ — ಪಬ —
ಬಮ — ಮಪ ಏಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

೬. ಒಂದು ರಕಮನ್ನು ರಾಮ, ವಿಷ್ಣು, ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದ ಇವರಲ್ಲಿ
ಹಂಚಲಾಯಿತು. ರಾಮನಿಗೆ ರಕಮಿನ ೧ ಪಾಲು ಸಿಕ್ಕು ರಾಮ ಮತ್ತು
ವಿಷ್ಣು ಇವರಿಬ್ಬರಿಗೂ ಕೂಡ ೨೦೦ ರೂ. ದೊರೆತವು. ಮತ್ತು ರಾಮ ಮತ್ತು
ಗೋವಿಂದ ಇವರಿಬ್ಬರಿಗೂ ಕೂಡ ೧೨೫ ರೂ. ದೊರೆತವು. ಪಾಗಾದರೆ
ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂ ಸಿಕ್ಕಿತು ?

೭. ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೧|| ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಪ್ರಭುರೇ ಸರ್ವಿ-
ಸೆಗಳೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಕೆಲವಕ್ಕೂ, ಮತ್ತು ಉಳಿದವನ್ನು ೨ ದರದಂತೆ ಬಡ್ಡಿಕೊಡುವ
ಮೋಕ್ಷದ ಸೇವೆಗೂ, ಹಾರಂಕನಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು ೧೫೦೦ ರೂ. ಗಳನ್ನು
ಬಡ್ಡಿಗಿಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೪೭೪ ರೂ. ಬಡ್ಡಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ.
ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ರೂ ಇದ್ದವು ಇಡಲಾಯಿತು ?

೮. ಅಕ್ಷೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$\frac{\text{ಕ್ಷ}}{೨} + \frac{\text{ಯ}}{೩} = ೯; \quad \frac{\text{ಕ್ಷ}}{೮} + \frac{\text{ಯ}}{೫} = ೪.$$

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ ನೆಯದು.

೧. ಯ^೩—೯ಯ^೨—೧೨ಯ+೧೬೦ ಇದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

೨. ಯ^೩—೮ಯ^೩—೮ಯ^೨—೮ಯ—೮೮ ಮತ್ತು ೩ಯ^೩—೭೮ಯ^೨+೩೮ಯ—೮೮ ಇವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಮತ್ತು ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೩. ಗುಣ ಪೃಥಕ್ ರಣವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

(ಅ) ೪ಯ^೩—೧೧ಯ^೨—ಯ+೧೪.

(ಆ) ೮ಯ^೩—೮೩—೨೭೮೩—೧೨ಯರ೮.

(ಇ) ಯ^೨+೨ಯರ+೮೩+೩ಯ+೩ರ—೪೦.

೪. ಬಿಡಿಸಿರಿ :

$$(ಅ) \frac{\text{೫ಯ}—೧}{೬} = \frac{\text{೯ರ}+೩೮}{೫} = \frac{\text{೭೯}—೭ಯ}{೧೧}$$

$$(ಆ) \frac{\text{೫}}{\text{ಯ}} - \frac{\text{೩}}{೮} = ೧; \quad \frac{\text{೨೫}}{\text{ಯ}} - \frac{\text{೧೩}}{೮} - ೧೧ = ೦.$$

೫. ದ ಮತ್ತು ನ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ. ಸಾ. ವಿ. ಅ ಮತ್ತು

ಲ. ಸಾ. ವಿ. ಕ ಇದ್ದು ದ—ನ = ಮ೮ — ^ಕಮ ಇದ್ದರೆ

ದ^೩—ನ^೩ = ಮ^೩ಅ^೩ — ^{ಕ^೩}ಮ^೩ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

$$\frac{(\text{ಯ}—ಪ)^{೩೩೩}$$

೭. ತಮ್ಮಣ್ಣ ಮತ್ತು ನಾನಪ್ಪ ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ವೇಳೆಗೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನೌಕರಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ತಮ್ಮಣ್ಣನ ಪ್ರಾರಂಭದ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ೧೦೦ ರೂ. ಇದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೧೦ ರೂ. ಬಡತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ನಾನಪ್ಪನ ಪ್ರಾರಂಭದ ಸಂಬಳವು ೧೫೦ ರೂ. ಇದ್ದು ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ೫ ರೂ. ಬಡತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅವರ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ (ವ) ಮತ್ತು ನೌಕರಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾದ ವರ್ಷಗಳು (ಕ) ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಂಬಳಗಳ ಅಲೇಖಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ವರ್ಷ ಅವರಿಬ್ಬರ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳವು ಅರ್ಜಿ ಇರುವವೆಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

೮. ಒಬ್ಬ ಗೃಹಸ್ಥನು ಜೊತೆಗೆ ೩ ಗಂಟೆಗೆ ಹೊರಟು ತಾಸಿಗೆ ೪ ಮೈಲುಗಳಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ ೨೦ ಮಿ. ಗಳ ವರೆಗೆ ನಿಂತು ತಿರುಗಿ ಬರುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದ ಕೆಲವು ಅಂತರವನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೧೫ ಮೈಲುಗಳ ವೇಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ವಸ್ತುವಿನಿಂದ ಬರುತ್ತಾನೆ. ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅರ್ಧ ಮೈಲನ್ನು ತಾಸಿಗೆ ೨ ಮೈಲಿನಂತೆ ನಡೆಯುತ್ತ ಬರುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ತಿರುಗಿ ಬರುವಾಗ ೯ ಗಂಟೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಊರುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರಗಳು

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧.

ಪು. ೫, ೬.

೧. ಅನೌ. ೨. ಓಳಯೌ. ೩. ಅಪೌ. ೪. ಉಕೌ—ಓಕಘ+
ಒಕಘೌ. ೫. ಓಳಕೌ. ೬. ಓಳ. ೭. ಒಗೌಒ. ೮. ಓೌ. ೯. ಒೌ.
೧೦. ೧. ೧೧. ೨. ೧೨. ೩. ೧೩. ೪. ೧೪. ೫. ೧೫. ೬. ೧೬. ೭. ೧೭. ೮. ೧೮.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨.

ಪು. ೧೧, ೧೨.

೧. ಓ;ಒರ+೩. ೨. ಅಓ;೧೨ಪ+೩. ೩. ಅಓತಿ; ೧೩ಪ ಒತಿ. ೪. ಅತಿ;
೧೪ಪ—೩ತಿ. ೫. ಅ;೨ಕ್ಷ+೫. ೬. ಓ;೨ಕ್ಷ—೨. ೭. ಅಪೌ;೨ಪ+೫ಮ.
೮. ಒಟಪೌ;ಅಪ+೩ಮ. ೯. ಒಳಾಯರ;೩ಯ+೧೦ರ. ೧೦. ಒಟಯಕ್ಷ;
೮ಯ+ಕ್ಷ. ೧೧. ಒಟಯೌರೌ;೩ಯೌ+೨ರೌ. ೧೨. ಒ೨ಕ;೩—೮ಕ.
೧೩. ಅ೨ಯ;೩ಯ—೨೦. ೧೪. ಒ೨ತಿಕಕ್ಷ;೩ತಿಕ—೩ಕ್ಷ. ೧೫. ಅ೨ತಿಗಘ;
ಅತಿಕ—೫ಗಘ. ೧೬. ಒ೨ತಿಕಗ;೯—೩ತಿಕಗ. ೧೭. ಅ೨;೩ಯ;೫ರ+೨,
ಅಯ—೩. ೧೮. ಅಯೌರೌ;೩ಯೌ+೨ರೌ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೩.

ಪು. ೧೫, ೧೬.

೧. ಒಟತೌ—೧೨ತದ+ದೌ—೩ತತ+೩ದ+೯. ೨. ಯೌ+
ಒರೌ+೯ಲೌ—೮ಯರ+೩ಯಲ—೨೪ರಲ. ೩. ಓಳಯೌ+೯ರೌ+
೪ಲೌ+ಅಳಯರ+೩ಯಲ+೧೨ರಲ. ೪. ಅ೫ಕೌ+ಅಗೌ+
ಅ೫ಘೌ—೨೦ಕಗ+೫೦ಕಘ—೨೦ಗಘ. ೫. ಒಟಪೌ—೧೩ಪು+
ಅಬೌ—ಅ೦ಪ+೩ಬ+೨೫. ೬. ಅಯೌ+೯ರೌ—೧೨ೌ—
೧೨ಯರ+೩ಯಲ—೩ರಲ. ೭. ಒಟಕೌ+೧೧ಗೌ+೩ಕಘ+
೩ಕಗ—ಅತಿಕಘ—ಅಗಘ. ೮. ತೃತೌ+೧೦೦ದೌ+೧೨ೌ—ಅ೨ದ—
೩ನ+೧೦ದನ. ೯. ಅ೫ಕೌ+೯ಗೌ+ಘೌ—೩೦ಕೌಗ—೧೦ಕೌಘ+
೩ಗಘೌ. ೧೦. ಕೌ—ಅಕೌಗ+೧೦ಕೌಗ—೧೨ಕಗ+೯ಗೌ. ೧೧.
ಯೌ—ಅಯೌ—೩ಯೌ+೨೦ಯೌ+೨೫ಯೌ. ೧೨. ಒ೨ಯ—
೩ಯೌರ+೩೩೨ಯೌರೌ—ಅಯೌರ+೧೨ರೌ. ೧೩. ಅ೨ಕೌ ಒ೨ತ+
ಒಟತೌ+೨೪ತ+೪. ೧೪. ಅಪೌ—೩೦ಪ+೩+
೩ಪ+೯ಪೌ.

$$\text{ಎಂ. } \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{23}{25} - \frac{12}{25} - \frac{10}{25} + \frac{50}{125}$$
$$02. \quad \frac{20}{100} + \frac{10}{100} + \frac{40}{100} - \frac{20}{100} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 0.2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$
$$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

ಚಗ್ಗನು - $\frac{1}{2}$ ರಿಂದ $\frac{1}{3}$ ವರೆಗೆ - $\frac{1}{6}$ ರಷ್ಟು. $\frac{1}{6}$ ರಷ್ಟು - $\frac{1}{6}$ ರಷ್ಟು + $\frac{1}{6}$ ರಷ್ಟು.

೨೦. ಅಕ್ಕಿ + ಅಕ್ಕಿ = ೨. ೨೦. ಅಕ್ಕಿ — ೨ = ೦.

ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತಿರಸ್ಕೃತ ಸ್ಥಳಗಳು:— ೨೨. — ೨೩. ೨೪. ೨೫. ೨೬.

೨೪. — ಇದ. — ಇನು. ೨೫. ೨೬. ೨೭. ೨೮. ೨೯. ೩೦. ೩೧. ೩೨. ೩೩.

ಉ. ತಳ—೧೨ತೆಜೆ + ೫೪ತೆಜೆ = ೧೦೨ತೆಜೆ + ೪೧ಜೆ.

೨೯. ೬೫೫ + ೧೦೦೫ + ೨೦೦೫ + ೩೦೦೫ + ೪೦೦೫.

$$2. \text{ } y^2 - y + 2 = \frac{y}{y^2} + \frac{1}{y^2}.$$

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೪.

ಪು. ೧೮, ೧೯.

೧. ೧೭. ೨. ೨೦. ೩. ೧೪. ೪. ೨೫. ೫. ೧೧. ೬. ೧. ೭. ೧೩. ೮. ೧೫. ೯. ೦

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೫.

၁၂. ၁၁.

೧. ತಿ + ದಿ + ಧಿ + ಸಿ - ತಿವಿ + ತಿವಿ - ತಿವಿ + ತಿವಿ -
ತಿವಿ. ೨. ಕಪಿ + ಗಿವಿ + ಧಿ + ಮಿ - ತಿವಿ - ತಿವಿ -
ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ. ೩. ಉಪಿ - ಗಿವಿ + ಗಿವಿ - ತಿ +
ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ. ೪. ಉಪಿ - ಗಿವಿ + ಗಿವಿ - ತಿ +
ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ. ೫. ಉಪಿ - ಗಿವಿ + ಗಿವಿ - ತಿ +
ತಿವಿ + ತಿವಿ + ತಿವಿ.

- ୧୭ - ନାୟକ - ୧୪୭ + ୧୦୭ - ନାୟକ + ୧୧ - ୧୭ + ୧

ಜಿ. ಪಠ - ಓಪಮಾ + ಗಣಪಮಾ - ಅಂಪಮಾ + ಗಣಪಮಾ -
 ಓಪಮಾ + ಮಾ. ಓ. ಓಳಯಃ - ಗಣಯಃರ + ಅಂಯಃರ +
 ಗಂಯಃರ + ಅಂಯಃರ + ಗಂಯಃರ + ರಃ. ೭. ತಃ - ಗಣತಃನ +
 ಗಣತಃನ - ಗಣತಃನ + ಗಣತಃನ - ಗಣತಃನ + ೭೦೦೦೦.
 ಉ. ಓಳಯಃ + ತಃಗಂಯಃರ + ಅಂಯಃರ + ಅಂಯಃರ + ಅಂಯಃರ +
 ತಃಗಂಯಃರ + ಗಣತಃನ - ತಃಗಂಯಃರ. ೯. ಓಳಯಃ - ಗಣತಃನ +
 ತಃಗಂಯಃರ + ಅಂಯಃರ + ಅಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ + ೭೦೦೦೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೬.

ಪು. ೨೪.

೧. ಗಂಯಃ - ರ + ಗಂಯಃ - ೭೦೦೦೦. ೨. ಅಮಾ - ಓಳಯಃ
 + ಅಂಯಃ - ೭೦೦೦೦. ೩. ಅಮಾ - ತಃಗಂಯಃ + ತಃಗಂಯಃ - ೭೦೦೦೦.
 ೪. ಅಮಾ - ತಃಗಂಯಃ + ತಃಗಂಯಃ - ೭೦೦೦೦. ೫. ತಃಗಂಯಃ +
 ತಃಗಂಯಃ + ಗಂಯಃ. ೬. ಗಂಯಃ - ಅಂಯಃರ + ಅಮಾ - ಅಮಾ
 + ಅಂಯಃರ - ಅಮಾ. ೭. ಅಮಾ - ತಃಗಂಯಃ + ತಃಗಂಯಃ - ಅಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ + ಗಂಯಃ. ೮. ತಃಗಂಯಃ + ತಃಗಂಯಃ - ಅಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ + ಗಂಯಃ. ೯. ತಃಗಂಯಃ + ತಃಗಂಯಃ - ಅಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ + ಗಂಯಃ. ೧೦. ಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ -
 ೧೧. ತಃಗಂಯಃರ - ರಃ, ೧೨. ತಃಗಂಯಃರ, ೧೩. ತಃಗಂಯಃರ, ೧೪. ತಃಗಂಯಃರ -

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೭.

ಪು. ೨೫, ೨೬.

೧. ತಃಗಂಯಃ + ಅಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ. ೨. ಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ +
 ತಃಗಂಯಃರ - ೭೦೦೦೦. ೩. ತಃಗಂಯಃರ + ಗಂಯಃರ + ಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ. ೪.
 ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ +
 ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ. ೫. ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ. ೬. ಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ -
 ತಃಗಂಯಃರ. ೭. ಪಠ - ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ - ತಃಗಂಯಃರ. ೮. ಪಠ -
 ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ. ೯. ತಃಗಂಯಃರ +
 ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ + ತಃಗಂಯಃರ +

ಒಮನು—ನನಿ. ೧೧. —ನನಿ—ಒನುಮ—ಒನಮು—ಮನಿ. ೧೨. —
 ಲನನಿ—ಲನನುಮ—ಲನನುಮು—ಒಳನಮನಿ. ೧೩. ಲರನಿ + ಅಳರನು +
 ಅಳರನು + ಲನನಿ. ೧೪. ಲನನಿ—೧೨೦೦೦ + ೬೦೦೦—೧೦೦೦. ೧೫. ಒನು-
 ೧೬. ೧೭. —೯. ೧೮. —೨. ೧೯. ೨೦. —೨೧. ೨೨. —೨೩. ೨೪. ೨೫. ೨೬. ೨೭. ೨೮. —೨೯.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ಲ.

ಪು. ೩೩, ೩೪.

೧. ಯನಿ + ಗುಯನಿ + ಒಳಯನಿ + ೧೨೦. ೨. ಲನಿ—೧೦೦೦ + ೩೦೦ +
 ೧೨೦. ೩. ವನಿ—೨೦೦೦ + ೧೦೦೦—೨೦೦. ೪. ಒನು—೧೦೦೦ + ೧೦೦೦ +
 ೨೦೦೦—೧೦೦. ೫. ೧೨೦ + ೨೦೦—೧೦೦೦ + ೩೦೦. ೬. ಲನನಿ +
 ೬೦೦ + ೧೦೦೦ + ೧೦೦. ೭. ೧೨೦ರನಿ—೨೦೦ರನಿ—೧೨೦ರನಿ—೧೦. ೮.
 ೨೨೦ರನಿ + ೩೦೦ರನಿ—೨೦೦ರನಿ—೬೦೦. ೯. ೧೨೦ಯನಿ + ೧೨೦೦ಯನಿ
 + ೬೦೦ಯನಿ—೨೦೦. ೧೦. ೧೨೦೦ + ೩೦೦೦ + ೧೦೦೦ + ೨೦೦. ೧೧.
 ೫೦೦—೧೦೦೦—೨೦೦೦. ೧೨. ೪೦೦—೨೦೦—೬೦. ೧೩.
 —೪೦೦—೨೦೦. ೧೪. —೨೦೦ + ೨೦೦—೧೦. ೧೫. ೯(೨—೩೦).
 ೧೬. ೧೦(೫೦—೧೦).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ಳ.

ಪು. ೩೮, ೩೯.

೧. (ಬ + ೩ಮ—೯)(ಬ—೩ಮ—೯). ೨. (೨೦ + ೫೦ + ೭)
 (೨೦—೫೦ + ೭). ೩. (೫೦—೨೦ + ೨೦—೫೦)(೫೦—೨೦—೨೦ + ೫೦).
 ೪. (೨೦ + ೨೦೦ + ೨೦೦)(೨೦—೨೦೦ + ೨೦೦). ೫. (೯೦೦ + ೧೦೦೦ +
 ೧೦೦೦)(೯೦೦—೧೦೦೦ + ೧೦೦೦). ೬. (೧೦೦೦ + ೩೦೦೦ + ೨೦೦೦).
 (೧೦೦೦—೩೦೦೦ + ೨೦೦೦). ೭. (ಯನಿ + ಯನಿ—೧)(ಯನಿ—ಯನಿ—೧).
 ೮. (ಪನಿ + ೩೦೦೦—೧೦೦)(ಪನಿ—೩೦೦೦—೧೦೦) ೯. (ಯನಿ—೧)
 (ಯನಿ + ೧)(೩೦೦—೨೦)(೩೦೦ + ೨೦) ೧೦. (೨೦೦ + ೫೦೦ + ೩೦೦)
 (೨೦೦—೫೦೦ + ೩೦೦). ೧೧. (೯೦೦ + ೨೦೦—೨೦೦)
 (೯೦೦—೨೦೦—೨೦೦) ೧೨. ೪(ಯನಿ + ೨೦ + ೪)(ಯನಿ—೨೦ + ೧).
 ೧೩. (೫೦ + ೩೦—೩೦)(೫೦—೩೦—೧). ೧೪. (೨೦ + ೫೦ + ೨)
 (೨೦—೫೦—೧). ೧೫. (ಯನಿ + ೧ + ೧)(ಯನಿ—೧ + ೧).

೧೬. (ಅತ-ಇದ+೩ನ-೪)(ಅತ-ಇದ-೩ನ÷೪).

೧೭. (ಇಚ+ಇಕ-೪ಗ)(ಇಚ-ಕ+೪ಗ). ೧೮. (ಅಪ+ಬ+ಮ)
(ಅಪ+ಬ-ಮ)(ಅಪ-ಬ+ಮ)(ಬ+ಮ-ಅಪ). ೧೯.

(ಅಯ-ಅರ+೪)(ಅಯ+ಅರ-೪). ೨೦. (೪ಯ+೭)(೪ಯ+೯).

೨೧. (೩ವ-೧)(೭ವ+೨). ೨೨. ಅ(ಅಚ-ಕ)(ಅಚ+ಕ)(ಅಚ+೩ಕ)
(೩ಕ-ಅಚ). ೨೩. ಅ(ಅಯ-೩ರ)(೧೨ಯ-೧೨ರ+೧)

(೧೨ಯ-೧೨ರ-೧). ೨೪. (೪ಚ+೩)(೪ಚ+೧)೪ಚ-೧).

೨೫. (ನ+೧)(೨ನ-೧)೨.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೦.

ಪು. ೪೧, ೪೨.

೧. (ಇಕ-೪)(ಇಕ-೧)(ಇಕ+೨). ೨. (೨-ವ)(೨-೩ವ)(೨-೪ವ).

೩. (ಕ-೪)(ಕ-೨)(ಕ+೩). ೪. (ನ-೬)(ನ ೫)(ನ-೩). ೫. (೪ಯ ೩)

೪ಯ+೧)(೪ಯ+೭). ೬. (ಅರ-೧)(೩ರ-೧)(೪ರ-೧). ೭. (ರ+೪)

(ರ-೪)೨. ೮. (೩ಚ+೪)(೩ಚ-೨)೨. ೯. (ಮ-೩)(ಮ+೪)(ಮ+೧೨).

೧೦. (ಚಿ+೩)(ಚಿ-೬)೨. ೧೧. (ಅಪ+೩)(೪ಪ-ಅಪ+೩). ೧೨.

(೩ನ-೨)(೩ನ+೪)೨. ೧೩. ಅಕ(೩ಚಿ+ಕ೨). ೧೪. (ಚಿ+ಕ)(೩ಚಿ-

೧೩ಚಕ+೭ಕ೨). ೧೫. ಅ(೩ವ+ನ)(೯ವ+೬ವನ+೧೩ನ೨). ೧೬.

೩(ಯ+೮)(೩ಯ+ಯರ+೮). ೧೭. (ಅರ-೩ಚ)(ಅರ+೩ಚ)

(೪ಚ+೬ಚಜ+೯ಚ೨)(೪ಚ-೬ಚಜ+೯ಚ೨). ೧೮. (ಅ-ಕ)(ಚಿ+ಕ)

(ಚಿ+ಕ೨)(ಚಿ-ಚಕ+ಕ೨)(ಚಿ+ಚಕ+ಕ೨)(ಚಿ-ಚಿಕ್ಕ+ಕ೨).

(೧೯. ಪ೨ಮ೨(೭ಪ-೪ಮ)(೪ಪ೨+೭ಪಮ+೧೩ಮ೨). ೨೦.

(೮ಚಿ-೫ಕ೨)(೬೪ಚಿ+೪೦ಚಕ೨+೨೫ಕ೨). ೨೧. ಪ(ಪ+೬)

(ಪ೨+೩ಪ+೯)(ಪ೨+೯ಪ+೩೭). ೨೨. ನ(ನ-೧)೨(ನ+೧)

(ನ೨+ನ+೨). ೨೩. ೦. ೨೪. ೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೧.

ಪು. ೪೫.

೧ (೮+೪)(೮+೭)(೮+೧೧೮+೨೦. ೨. (ವ-೫)೨

(ವ೨-೧೦ವ+೧೨). ೩. (ಜ-೩)(ಜ+೬)(ಜ೨+೩ಜ-೩೦

೪. (ಪ+೨)(ಪ+೩)(ಪ+೫ಪ-೧೨). ೫. (೧-೧೦೩೧೮

(೩ಗಂ-೨ಗಂ-೪). ೬. ೩೨(ಯಂ+ಯಂ-೧)(೪ಯಂ+೨ಯಂ-೫)-

೭. (ಯಂ-೨)(ಯಂ+೫ನಂ)(ಯಂ+೪ನಯಂ-೬ನಂ). ೮.

೯(೨ರಂ-೧೦ನಂ+೫ನಂ)(೨ಂ-೫ನಂ+೫ನಂ). ೯. ೩(೩ರಂ-೩ಕರಂ-೫ಕಂ)

(೨ರಂ-೯ಕರಂ+೯ಂ).

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೨.

ಪು. ೪೮, ೪೯.

೧. (೨+೨-೧)(೨+೨+೧-೨+೨+೧+೧). ೨.

(೨ ೨ ೨)(೨+೨+೨+೨-೨-೨-೨). ೩. (ಯಂ+೨ರಂ+೨)

(ಯಂ+೪ರಂ+೨-೨ಯಂ-೨ರಂ-೨ಯಂ). ೪. (೨ಯಂ+೩ರಂ+೫)

(೪ಯಂ+೨ರಂ+೨ಯಂ-೨ಯಂ-೧೫ರಂ-೧೦೨ಯಂ). ೫.

(೪೨-೨+೨೫)೧೬೨+೨+೪೨+೪೨೨+೨೨೨-೨೨೨). ೬.

(೫೨-೨೧-೫)(೨೫೨+೪೧೨+೫೨+೧೦೨೧-೨೧೫+೫೫೨).

೭. (೨೨+೩೨-೧)(೪೨-೨೨೨+೨೨೨+೨೨೨+೨೨+೩೨+೧). ೮.

(೪೨-೫೨-೨)(೧೬೨+೨೨೨+೨೫೨+೨೨-೧೦೨+೪). ೯.

(೨೫+೨೫-೪)(೪೫-೬೫+೧೫+೧೫+೧೫+೧೫). ೧೦.

(ಯಂ-೨ಯಂ+೫)(ಯಂ+೨ಯಂ-ಯಂ+೧೦ಯಂ+೨). ೧೧.

(ಯಂ-೨+೨೨)(ಯಂ+೨+೨೨+ಯಂ+೨೨-೨೨-೨೨). ೧೨.

(೨೫-೨೨-೨೨)(೪೫+೨೨+೨೨+೨೨-೨೨-೨೨+೨೨).

$$೧೩. \left(\frac{೨-೨}{೨} \right) \left(\frac{೨+೨+೨+೨}{೨} \right).$$

$$೧೪. \left(\frac{೨+೨+೨}{೨} \right) \left(\frac{೨-೨+೨-೨}{೨} \right).$$

$$೧೫. \left(\frac{೨-೨-೨}{೨} \right) \left(\frac{೪೫+೪೫+೧೦-೨}{೨} \right).$$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೧೩.

ಪು ೫೩.

೧. ೧. ೨. ೫೧. ೩. -೨೬೮. ೪. ೨೫೨. ೫. ೧೫೧. ೬. ೨೬.

೭. -೧೫೪. ೮. ೬. ೯. ೧೫೪. ೧೦. -೨೩೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೪.

ಪು. ೫೭.

೧. (ಯ+೨)(ಯ-೬)(ಯ-೪). ೨. (ವ-೩)(೨ವ-೩)(೨ವ+೧).
 ೩. (ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ-೨)(೩ಕ್ಷ-೧). ೪. ೨೦; (ವ-೪)(ವ-೫)(ವ+೬).
 ೫. -೪; (ಯ+೪)(ಯ+೩)(ಯ-೨). ೬. ೧೫; (ರ-೫)(೨ರ+೧)
 (೨ರ+೫). ೭. -೧೦೪. ೮. ೦. ೯. -೨೭, -೨೨. ೧೦. ೯
 -೧೨. ೧೧. -೧, ೧೩. ೧೨. ೨, -೨೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೫.

ಪು. ೬೪, ೬೫.

೧. (ರ-೧)(ರ-೫)(ರ+೨). ೨. (ಲ+೧)(ಲ+೫)(ಲ+೭).
 ೩. (ಅ-೧)(೨ಅ+೫)(೩ಅ-೨). ೪. (ಪ+೧)(೩ಪ-೧)(೪ಪ+೫).
 ೫. (ರ-೧)²(೪ರ+೧). ೬. (ರ+೧)²(೬ರ+೭). ೭. (ಕ್ಷ-೧)
 (ಕ್ಷ+೧)(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ+೫). ೮. (ಅ-೧)²(೫ಅ-೪)(೫ಅ+೪).
 ೯. (ಯ-೧)(ಯ+೧)(೩ಯ-೧)(೫ಯ+೪). ೧೦. (ಅ-೧)²
 (೨ಅ-೧)(೩ಅ+೧೦). ೧೧. (ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ+೧)(೩ಕ್ಷ-೨)². ೧೨.
 (ಕ್ಷ+೪)(ಕ್ಷ-೫)². ೧೩. (ಯ-೧)(ಯ-೨)(ಯ-೩)(ಯ-೪).
 ೧೪. (ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ-೫). ೧೫. (೨ನ-೧)(ನ+೩)².
 ೧೬. (ಯ-೩)(೨ಯ+೩)². ೧೭. (ನ+೫)(೨ನ-೫)².
 ೧೮. (ಕ್ಷ-೨)(ಕ್ಷ+೫)(೨ಕ್ಷ+೧)(೩ಕ್ಷ-೨). ೧೯. ೭, -೧೨.
 ೨೦. ೧೭, -೨. ೨೧. ೬, ೨. ೨೨. ೬, ೨೪. ೨೩. ೩, -೩.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಪು. ೭೫.

೧. (ಯ-ರ)(ರ-೪)(ಯ-೪). ೨. (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)
 ಮ+ಪ. ೩. (ತ-ದ)(ದ-ನ)(ನ-ತ). ೪. (ಪ-ಮ)(ಯ-ಪ)
 ಮ-ಮ. ೫. (ಯ+ರ)(ರ+೪)(ಲ+ಯ). ೬. (ಪ+ಬ)
 ಮ+ಮ(ವ+ಪ). ೭. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ-ಪ)(ಪ+ಬ+ಮ).
 ೮. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಪ-ಮ)(ಪ+ಬ+ಮ). ೯. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)
 -ಮ(ಪ+ಬ+ಮ). ೧೦. (ಯ+ರ)(ರ-೪)(ಯ-೪)
 ಮ+ರ+೪+೪+ಯರ+ರಲ+ಲಯ. ೧೧. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)
 ಮ-ಪ(ಪಬ+ಬಮ+ಮಪ). ೧೨. ೩ಯರಲ(ಯ-ರ)(ರ-೪)

(ಲ - ಯ) ೧೩. ೨(ಯ - ರ)(ಯ + ರ)(ರ - ಲ)(ರ + ಲ)(ಲ - ಯ)
(ಲ + ಯ). ೧೪. (ಯ + ರ + ಲ)(ಯರ + ರಲ + ಲಯ)

ಪ್ರಶ್ನಾಸಂಗ್ರಹ ೧೭.

ಪ್ರ. ೨೬.

[illegible]

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೮.

ಪ್ರ. ಲಕ್ಷ, ಲಕ್ಷ.

೧. ನೌ--ವನ+ಸೌ;(ವ+ಸ)(ನೌ+ಮೌವ+ಸೌ). ೨. ಯ+ಳ;
 (ಯ+೧)(ಯ+ಳ)೨. ೩. ರ-೩; (ರ-೧)(ರ-೩)೨. ೪. ನೌ+ಳನ+೧೬;
 (ನ-ಳ)(ನೌ+೧೬ನೌ+೨೫). ೫. ೩(ಮ-೩); ೩(ಮ+೩)(ಮೌ-೨೭).
 ೬. ವೌ-ಸೌ; (ವೌ+ಸೌ)೨(ಮೌ-ಸೌ)೨. ೭. (ನ-೫)(ನೌ+೨೫);
 ನೌ-೬೫. ೮. (ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ+೩);(ಕ್ಷ+೧)(ಕ್ಷ+೨)(ಕ್ಷ+೩)(ಕ್ಷ+೪).
 ೯. ೨(ಕ್ಷ-೧)(ಕ್ಷ-೫); ೪ಕ್ಷ(ಕ್ಷೌ-೧)(ಕ್ಷ-೫). ೧೦. ೪(ಯ+ಕ್ಷ)೨;
 ೮ಯ(ಯ+ಕ್ಷ)೨. ೧೧. ೫ಯ+೩ಕ್ಷ+೨; (೫ಯ+೩ಕ್ಷ+೨)
 (೫ಯ+೩ಕ್ಷ+೧)(೫ಯ-೩ಕ್ಷ+೬). ೧೨. ಅ+೨ಕ+೫ಗ;
 ೨(ಅ-೨ಕ+೫ಗ)(ಅ+೨ಕ+೧೨೫ಗ-೩೦ಅಕಗ), ೧೩. ಪ-೭;
 ೨ಅಕ(ಪ-೩೪೩)(ಪ+೩)(ಪ+೪) ೧೪. (ಕ್ಷ+೬)(ಕ್ಷ+೧);
 (ಕ್ಷ+೧)(ಕ್ಷ+೬)(ಕ್ಷ+೧)(೪ಕ್ಷ-೩) ೧೫. ೧;(ಪೌ+೯ಪೌ+೮೧)
 (ಪೌ+೧೨ಪ+೨೭). ೧೬. ೧;೧೨(ಕ್ಷ-೭)(ಕ್ಷ-೩)(ಕ್ಷ+೫). ೧೭.
 ೧; ೬(ಯ-೬೪)(ಯ-೬೪)(ಯ+೧೨). ೧೮. ೬(ಕ್ಷ-೭)
 (ಕ್ಷ-೫)(ಕ್ಷ+೨) ೧೯. (೨ಯ-೫ಕ್ಷ)(೩ಯ+೨ಕ್ಷ)(೪ಯ-೭ಕ್ಷ).
 ೨೦. (ಅ+೧)(ಅ-೨)(ಅ-೪)(ಅ-೫)(ಅ+೩). ೨೧. (ಪೌ-೧)
 (೩ಪೌ-೧)(೩ಪ+೫)(೪ಪ-೩).

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೧೬.

ಶ್ರೀ. ಲೆ. ೨.

[illegible]

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೨೦.

ಪು. ೪೪, ೧೦೦.

[illegible]

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೧.

ಪ್ರ. ೧೦೩, ೧೦೪.

ॐ + ॐ ॐ + ॐ ॐ + ॐ ॐ + ॐ ॐ + ॐ
 ॐ + ॐ ॐ + ॐ ॐ + ॐ ॐ + ॐ ॐ + ॐ

೫. $\frac{ಅಪ-೭ಮ}{೩ಪ+ಮ}$ ೬. $\frac{ಬಿಹ+೫ಕ}{೨(ಅ-೨ಕ)}$ ೭. $\frac{೩ಯ-೭}{೪ಯ-೧}$
೮. $\frac{೨(೫ಕ್ಷ-೨)}{೨ಕ್ಷ+೫}$ ೯. $\frac{ಯ+೨}{ಯ+೬}$ ೧೦. $\frac{ಪ-೧}{ಪ+೨}$
೧೧. $\frac{ಯ+೨}{೪ಯ-೩ಯ+೧}$ ೧೨. $\frac{ನ+೩}{ನ+೫}$ ೧೩. $\frac{ಮ+೪}{ಮ+೨ಮ-೧೫}$
೧೪. $\frac{ಮ+೨ಮ-೮}{ಮ-೨ಮ-೮}$ ೧೫. $\frac{ಯ-೮}{ಯ+೮}$ ೧೬. $\frac{ಪ+೧೬ಮ}{೨ಪ+ಮ}$
೧೭. $\frac{೪(ಯ+೪ಯ+೩)}{೨ಯ+೨ಯ-೫}$ ೧೮. $\frac{ಅ-೪ಕ}{ಅ+೪ಕ}$
೧೯. $\frac{೫ಹ+೩ಕ+೨ಗ}{೫ಹ+೩ಕ-೨ಗ}$ ೨೦. $\frac{(ಅ-೧)(ಅ-೩)}{(ಅ+೧)(ಅ+೩)}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೨.

ಪು. ೧೦೮-೧೧೦.

೧. $\frac{ಅ+ಅಮ+ಮ}{ಅ-ಅಮ+ಮ}$ ೨. $\frac{೫}{೮}$ ೩. $\frac{೨ಕ್ಷ+೩}{೩ಕ್ಷ+೨}$
೪. ೧. ೫. $\frac{೪(ಅ+ಅನ+ನ)}{೧೫}$ ೬. ೧. ೭. $\frac{೪(೫ಯ-೨)}{೩(ಯ-೩)}$
೮. $\frac{೨(ಯ+ಕ್ಷ)}{೩ಯ-ಕ್ಷ}$ ೯. $\frac{೫ಹ-ಕ}{೨ಹ-ಕ}$ ೧೦. $\frac{(ಮ-೨)(ಮ+೪)}{(ಮ+೫)(ಮ+೭)}$
೧೧. $\frac{ನ-೧}{ನ-೨}$ ೧೨. $\frac{ಅ+೧}{ಅ+೭}$ ೧೩. $\frac{೨ಪ+ಮ}{೪ಪ-೨ಪಮ+ಮ}$
೧೪. ೧. ೧೫. $\frac{೩ಯ-೧}{೧೬ಪ-೪ಪ+೧}$ ೧೬. $\frac{೧೬ಪ-೪ಪ+೧}{ಪ-೫ಪ+೨೫}$ ೧೭. ೩.
೧೮. $\frac{೮+೮೮+೮}{೪}$ ೧೯. ೨. ೨೦. $\frac{ಯ+ಪ}{ಯ-ಮಯ+ಮ}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೩.

ಪು. ೧೧೩, ೧೧೪.

ಮುದ್ರಣದ ಅನುಕೂಲತೆಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಾಧಾರಣ ಭೇದವನ್ನು
ರಾಯ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೊಸ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

೧. ಅ—ಕ; ೨(ಅ+ಕ), ೨(ಅ—ಕ). ೨. (೨ಅ+೩ಕ) (೨ಅ-೩ಕ);
 ೫(೩ಅ—೨ಕ), ೭(೨ಅ+೩ಕ). ೩. ಅ(ಅ—ಗ) (೨ಅ+೩ಗ);
 ೭(೨ಅ+೩ಗ), ೩(ಅ—ಗ). ೪. ೧೨(ಯ+೩ರ); ೪ನ, ೯ನ,
 ೫. (ಯ—೨)(ಯ—೩)(ಯ—೪); ೨(ಯ—೩), ೩(ಯ—೨). ೬. (ರ-೫)
 (ರ+೭)(೨ರ+೧); ೩(ರ+೭), ೨೩(ರ-೫). ೭. (೨ಯ-೩ರ)(೩ಯ+೪ರ)
 (೫ಯ—೨ರ); ೫ನ(೫ಯ—೨ರ), ೪ನ(೨ಯ—೩ರ). ೮. (ಅ+೪)
 (ಅ+೨)(ಅ-೫); ಅ-೫, ೪(ಅ+೨), ೨(ಅ+೪). ೯. (ಅ—ಕ)೨;
 ಅ—ಕ೨, (ಅ+ಕ)೨, (ಅ-ಕ)೨. ೧೦. ಯ-ರ; ಯ೨+ರ೨, ಯ-ರ೨,
 ಯ೨+ಯ೨ರ+ರ೨, ಯ-ರ೨. ೧೧. (ಯ—ರ)(ರ—೪)
 (೪—ಯ); ೪-ಯ, ೨(ಯ—ರ), ೩(ರ—೪). ೧೨. (೪ಯ-೨೫ರ)
 (೪೫ಯ-೧೬ರ); ೩೩(೪೫ಯ-೧೬ರ), ೨೨(೪ಯ-೨೫ರ),
 ೫(೨ಯ+೫ರ)೭ಯ-೪ರ.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೪.

ಪು. ೧೨೨—೧೨೪.

೧. $\frac{ಅಮ}{ಪಮ}$ ೨. $\frac{ಅಅಕ}{ಅ-ಕ೨}$ ೩. ಅ.
೪. $\frac{ಅ+ಕ-೨ಅಕ}{ಅಕ}$ ೫. $\frac{ಅ೨+ಕ೨+ಅಕ೨}{ಅಕ೨}$
೬. $\frac{ಅಪ}{ಪಮ}$ ೭. $\frac{೨ಕಮ}{(ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ)}$ ೮. $\frac{೪ದನ}{ದ-೫}$
೯. $\frac{ಯ+೨೫}{ಯ-೧೨೫}$ ೧೦. $\frac{೨ಪ೨}{ಪ+ಪಮ+ಮ೨}$
೧೧. $\frac{೨ಅ-೧೨ಅ+೧೯}{(ಅ-೨)(ಅ-೩)}$ ೧೨. $\frac{೩}{(ಅ+೩)(ಅ+೪)(ಅ+೫)}$
೧೩. $\frac{೨(೯ಯ+೧೬)}{೮ಯ೨+೧೪೪ಯ೨+೨೫೬}$ ೧೪. $\frac{ರ+೪}{ರ-೪}$
೧೫. $\frac{೧೦ಮ}{(೨ಪ+೫ಮ)೨}$ ೧೬. $\frac{೨(೩ನ+೧)}{(ನ-೧)(ನ+೨)(ನ+೩)}$

೧೭. $(ಪ-ಮ)(ಪ-ಮ-ಸುಮ+ಮ)$ ೧೮. $(ಅ+ಇ)²$

೧೯. $ಪ-ಮ-ಸುಮ+ಮ$ ೨೦. $ಪ-ಗ$

೨೧. $(ಪ+ಮ)²$ ೨೨. $ಪ-ಮ$ ೨೩. $ಅ-ಇ$

೨೪. $ಮ-ಸುಮ+ಮ$ ೨೫. $ಅ-ಮ$

೨೬. $(ಪ-ಮ)²$ ೨೭. ೦. ೨೮. ೦.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೫. ಪು ೧೨೬, ೧೨೭.

೧. $ಪ-ಮ$ ೨. $ಪ-ಮ$ ೩. $ಗ-ಮ$

೪. $ಅ-ಮ$ ೫. $ಪ+ಮ$ ೬. $ಅ-ಮ$ ೭. $(ಮ-ಅ)²$

೮. $ಪ-ಮ$ ೯. $ಅ-ಮ$

೧೦. $(ಮ+ಅ)(ಮ-ಅ)$ ೧೧. $(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)$

೧೨. $(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)$ ೧೩. $ಅ-ಮ$

೧೪. $ಅ-ಮ$ ೧೫. $(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)(ಅ+ಇ)$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೨೬. ಪು. ೧೨೯, ೧೩೦

೧. $(ಮ+ಅ)$ ೨. $(೧-ಅ)(೧-ಅ)$

೩. $(ಮ-ಅ)(ಮ-ಅ)$ ೪. $(ಅ-ಇ)(ಅ-ಇ)$

ಜಿ. $\frac{ಅ+ಕ}{ಅ-ಕ}$ ಒ. $\frac{ಅ}{(ಅ-೧)(ಅ-೨)}$ ಒ. $\frac{ಅ}{(ಅ-೧)(ಅ-೨)}$

೮. $\frac{ಅ(ನ+ಪ)(ನಪ-ಮ)}{(ನ-ಮ)(ಪ-ಮ)}$ ೯. $\frac{ಅಕ(ಕ-ಗ)}{(ಕ-ಕ)(ಅ-ಗ)}$

೧೦. $\frac{೬೦}{(ಯ-೧)(ಯ-೨)(ಯ+೩)(ಯ+೪)}$

೧೧. $\frac{೫೫+೨೧}{೫೫+೫೫+೨೦}$ ೧೨. $\frac{೨}{ಅ-೫೫}$

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೭ ಪು. ೧೩೬, ೧೩೭.

೧. $\frac{೧}{ಪ-ಮ}$ ೨. $\frac{೨}{೫ಯ-೨}$ ೩. $\frac{೧೦}{ಕ-೩}$ ೪. $\frac{೪}{ಪ-ಮ}$

೫. $\frac{೧}{(ಪ-೧)(ಪ-೨)}$ ೬. $\frac{೨ಮ}{ಪ-ಮ}$

೭. $\frac{೫ಕ-೩}{(ಕ+೪)(೨ಕ-೧)(೩ಕ-೨)}$ ೮. $\frac{೧}{ನ-೨}$ ೯. $\frac{೧೨ಯ}{೧-೧೩ಯ}$

೧೦. $\frac{೯೫}{(ಪ-೪)(ಪ-೧೩)}$ ೧೧. $\frac{ಪ}{(ಪ-೭)(ಪ-ಮ)}$

೧೨. ೦. ೧೩. ೧. ೧೪. ೦. ೧೫. ೦. ೧೬. ೦. ೧೭. ೦.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೨೮. ಪು. ೧೪೧-೧೪೪.

೧. $\frac{೧}{ಅ}$ ೨. $\frac{೨}{ಯ-೨}$ ೩. $\frac{ಪ+೨}{ಪ+೩}$ ೪. $\frac{೪}{ಯ+ವ}$

೫. $\frac{ಕ+ರಲ+ಲ}{ಕ+ಲ}$ ೬. $\frac{ಪ-೨}{ಪ-೪}$ ೭. $\frac{ಅ-೪}{ಅ-೪}$ ೮.

$\frac{ಕ-೨೪}{ಕ(ಕ+೨)}$ ೯. $\frac{ಯ+೨}{ಯ-೨}$ ೧೦. $\frac{ಪ+೭+ಮ-೭೭-೭೭}{ಪ+೭+ಮ-೭೭-೭೭}$

೧೧. $\frac{೪೫-೪೫}{೪೫-೪೫}$ ೧೨. $\frac{೪೫-೪೫}{೪೫-೪೫}$ ೧೩. $\frac{೪೫-೪೫}{೪೫-೪೫}$

$$09. \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot 03. \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot 02. \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$

$$30. \text{ a. } 99. \quad \frac{(5-1)(5-1)}{5+1} = 92. \text{ b. } 99. \text{ c. } 99. \text{ d. } 99.$$

೨೫. ಪೆ + ಪಿ + ಪು = ಪು-ಪು-ಪು. ಪು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೨೯. ಪ್ರ. ೧೪೬.

১. ১৯৫০-৫১. ২. ১৯৫১-৫২. ৩. ১৯৫২-৫৩. ৪. ১৯৫৩-৫৪. ৫. ১৯৫৪-৫৫. ৬. ১৯৫৫-৫৬. ৭. ১৯৫৬-৫৭. ৮. ১৯৫৭-৫৮. ৯. ১৯৫৮-৫৯. ১০. ১৯৫৯-৬০.

೩. ೧-ಯು. ೨-ಯು. ೩. ಅ. ೪. (ಪ-೩)೪. ೫. ಪ+ಯು.

[illegible]

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೦. ಪು. ೧೫೩.

८. $\frac{0}{23} + \frac{0}{34} + \frac{0}{45}$. ९. $\frac{39}{54} + \frac{59}{64} + \frac{49}{74}$.

3. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ 4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

$$\frac{0}{\text{மேலே}} - \frac{0}{\text{கீழே}} = 0$$

உ. $\frac{0}{a-0} + \frac{0}{a-3}$ 2. $\frac{0}{a-0} + \frac{0}{a-2}$ 3. $\frac{0}{a} + \frac{0}{a}$

90. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$ 91. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$

১০. $\frac{0}{x-3} + \frac{0}{x+3}$ ১১. $\frac{0}{x-2} - \frac{0}{x+2}$

$$೧೩. \frac{೧}{ಯ+೪} - \frac{೧}{ಯ+೪} \cdot ೧೪. \frac{ಪ+ಮ}{ಪ-ಮ} + \frac{ಪ-ಮ}{ಪ+ಮ}$$

$$೧೫. \frac{೧}{೨-೨೨} \cdot - \frac{೧}{೨+೨೨} \quad ೧೬. \frac{೧}{ಪ-ಮ} + \frac{೧}{ಪ+ಮ}$$

$$೧೭. \frac{ಯ+೩}{ಯ-೩} + \frac{ಯ-೩}{ಯ+೩} \cdot ೧೮. \frac{೧}{ಯ-ಯರ+೨} +$$

$$\frac{೧}{ಯ+ಯರ+೨} \cdot ೧೯. ೧-೮+೮- \frac{೮}{೧+೮} \cdot ೨೦. ೧+$$

$$೮+೮+ \frac{೮}{೧-೮} \cdot ೨೧. ೧+೮+೮+ \frac{೮}{೧-೮} \cdot$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೧.

ಪು. ೧೫೫, ೧೫೬.

೧. ೨(ಯ-೪). ೨. ೩(ಯ+೧). ೩. ೮+೯. ೪. ಪ-ಮ+ಮ. ೫. ನ-ನಮ+ಮ. ೬. ಯ+ಯವ+ಮ. ೭. ಪ-೫.

$$೮. \frac{ಪ}{(ಪ-ಮ)} \quad ೯. \frac{೨(೨ರ-೫)}{(ರ-೯)(ರ-೨)(ರ-೩)}$$

$$೧೦. \frac{೪(೩ಯ-೨)}{(ಯ-೪)(ಯ-೨)(ಯ+೬)}$$

$$೧೧. \frac{೩ಯ-೭}{(ಯ-೩)(ಯ-೨)(ಯ-೧)} \cdot ೧೨. \frac{೨ಮ(೨ಪ+ಮ)}{(ಪ-ಮ)(ಪ+ಮ)}$$

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೨.

ಪು. ೧೬೪-೧೬೬.

೧. ೧೮, ೪. ೨. ೭೫, ೯೫. ೩. ೫, ೩. ೪. ೩, ೨. ೫. ೨೫, ೧೫. ೬. ೪೫, ೧೫. ೭. ೫, ೩. ೮. ೫, ೩. ೯. ೧, ೨. ೧೦. ೨೭, ೫೫. ೧೧. ೫, ೪. ೧೨. ೨, ೩. ೧೩. ೨, ೪. ೧೪. ೨, ೧. ೧೫. ೪, ೨. ೧೬. ೪, ೬. ೧೭. ೨, ೨. ೧೮. ೫, ೨೫. ೧೯. ೧, ೨. ೨೦. ೨, ೧. ೨೧. ೩, ೨. ೨೨. ೨, ೨. ೨೩. ೩, ೧.

ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ ೩೩

ಪು. ೧೭೦, ೧೭೧.

೧. ೩, ೩. ೨. ೫, ೧೫. ೩. ೨೫, ೫೫. ೪. ೧೫, ೨. ೫. ೫, ೫. ೬. ೫, ೫. ೭. ೨, ೩. ೮. ೨, ೨. ೯. ೫, ೫. ೧೦. ೪, ೫.

ନବ. ୨, - ୬. ଗଞ୍ଜ. ୨, ୩. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୪. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୪. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୪. ଗଞ୍ଜ. ୩, ୪.

ಪ್ರತ್ಯ ಸಂಗ್ರಹ ೩೪.

୧୭. ୦୧୩—୦୧୪.

ဂ. ၁-ဂ. ဟ. ၁. ခ. ၂. င. ၃. ဇ. ၄. ဈ. ၅. ၆. ၇. ၈. ၉. ၁၀. ၁၁. ၁၂. ၁၃. ၁၄. ၁၅. ၁၆. ၁၇. ၁၈. ၁၉. ၂၀. ၂၁. ၂၂. ၂၃. ၂၄. ၂၅. ၂၆. ၂၇. ၂၈. ၂၉. ၃၀. ၃၁. ၃၂. ၃၃. ၃၄. ၃၅. ၃၆. ၃၇. ၃၈. ၃၉. ၄၀. ၄၁. ၄၂. ၄၃. ၄၄. ၄၅. ၄၆. ၄၇. ၄၈. ၄၉. ၅၀. ၅၁. ၅၂. ၅၃. ၅၄. ၅၅. ၅၆. ၅၇. ၅၈. ၅၉. ၆၀. ၆၁. ၆၂. ၆၃. ၆၄. ၆၅. ၆၆. ၆၇. ၆၈. ၆၉. ၇၀. ၇၁. ၇၂. ၇၃. ၇၄. ၇၅. ၇၆. ၇၇. ၇၈. ၇၉. ၈၀. ၈၁. ၈၂. ၈၃. ၈၄. ၈၅. ၈၆. ၈၇. ၈၈. ၈၉. ၉၀. ၉၁. ၉၂. ၉၃. ၉၄. ၉၅. ၉၆. ၉၇. ၉၈. ၉၉. ၁၀၀.

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೫.

ಪ್ರ ೧೭೬—೧೮೭.

[illegible]

ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ ೩೬.

ప్ర. ౨౦౦.

೩. ಭುಜಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. ೪. ಕೋಟ್ಯಾಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. ೫-
ಅರಂಭಸ್ಥಾನಮೊಳಗಿಂದ ಹಾಯುವದು.

ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ ೩೮.

ସ୍ତ. ୨୦୬.

೧. ಯ = ೨ಕ್ಷ + ೪. ೨. ಯ = ೮ಕ್ಷ — ೭. ೩. ೨ಕ್ಷ — ಯ + ೮ = ೦.
 ೪. ೨ಕ್ಷ — ೪ಯ = ೧೬. ೫. ೨ಕ್ಷ + ೨ಯ = ೧೫. ೬. ೪ಕ್ಷ — ೨ಯ +
 ೫ = ೦. ೭. ೨ಕ್ಷ — ೨ಯ = ೧೫. ೮. ೪ಕ್ಷ — ೫ಯ = ೪. ೯. ೨ಕ್ಷ — ೪ಯ
 + ೨ = ೦. ೧೦. ೨ಕ್ಷ + ೨ಯ = ೨.

ಪ್ರತ್ಯಸಂಗ್ರಹ ೩೯.

ಪು. ೨೨೪, ೨೨೫:

ဂ. ၁, ၂, ၃ ဂ, - ဂ. ခ. ၁, ဂ. ဖ. ၁, ၂, ၃. ခ. ၁, - ဂ. ခ. ၁, ၂.
 ၂. ဂ, - ခ. ဖ ၁, ဂ. ဖ. ဂ, ခ. ဂ. ၁, ၂. ဂ. ၁, ၂. ဂ. ၁, - ဂ.

೧೩. ೪. ೧೪. —೧೨. ೧೫. ೩೩. ೧೬. —೩. ೧೭. ೨. ೧೮. ೩. ೧೯. —೧೨. ೨೦.—೧.

ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ ೪೦.

ಪು. ೨೩೪—೨೩೮.

೧. ೪೫; ೧೫; ೫; ೧೦. ೨. ೧೨ಶೇರು; ೨೫ಶೇರು. ೩. ೮|| ಗಂಟೆಗೆ ೧೦|| ಮೈಲಿನ ಮೇಲೆ, ೭|| ಮೈ.; ೬||. ೪. ೧೦|| ಗಂಟೆಗೆ ೩೬ ಮೈಲಿನ ಮೇಲೆ. ೫. ೮||. ೫. ೮ ಮೈ; ೪ ಮೈ; ೧೦||. ೬. ೫೦೦೦, ೧೦೦೦, ೨೦೦೦; ೫೦೦೦, ೭೦೦೦, ೧೦೦೦೦, ೭. ೨೦೦೦; ೩೦೦೦, ೬೦ ೦೦. ೮೦೦೦, ೧೦೦೦೦, ೧೦೦೦೦. ೯. ೩೦. ೧೦. ೧೦. ೩೫; ೫೫ ೧೦. ೮೦೦೦, ೭೦೦೦. ೧೩. ೮೦೦೦ ರೂ.; ೫೦: ೨೦ ೧೪. ೧೪೦೦ ರೂ.; ೧೩. ೧೫. ೪೦೦ ರೂ.; ೧೪೦. ೧೬. ೭೦೦; ೪೦೦.

ಪತ್ರಿಕೆ ೧ನೆಯದು.

ಪು. ೨೩೯.

೧. ೨೪; (ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ+೨)(ಯ+೩)(ಯ-೪). ೨. ೨೪೪-ಯ-೩ - ೩೪೪+೭೪೪-೩೦. ೩. ೨ (ಕ+ಗ+ಘ); (ಪ+ಪಮ+ಮ)/(ಪ+ಮ). ೪. ೩; ೧೨; ೧೫. ೫. ೬೦೦. ೧೧೦೦. ೯೦೦೦. ೬. ೩, ೩. ೮. ೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೨ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೦.

೧. ೧೧; ೧೪. ೨. ೬; (ಯ-೫)(ಯ-೧)(೨ಯ+೭ಯ+೭). ೩. ೧; ೧೩(ಯ-೧) ೪. ಯ+೩; (ಯ+೩)(೨ಯ+೧)(೪ಯ+೩). (೨ಯ-೫)(೧೬ಯ-೧೫). ೫. —೨; ೮೦, —೧೦೦. ೬. (೨ಯ+೭೪-೩)(೩ಯ+೩೪+೨); ೬(ಯ+೩)(ಯ-೫)(೧-ಯ), ೬ಪ(ಪ-೨)(ಪ-೧)(ಪ+೩), ೭. ೯೦೦. ೨೦ ಮಿ; ೧೩೦೦೦. ೮. ೨೭.

ಪತ್ರಿಕೆ ೩ ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೧.

೧. (ಯ-೧)(ಯ+೧)(ಯ-೨)(ಯ+೨)(ಯ+೩); (ಯ+೪)(ಯ+೫)(ಯ+೬); (ಪ+ಬ)(ಬ+ಮ)(ಮ+ಪ); ೨. ೧೫; ೯. ೩. ೧; (ಪ-೪) / ಪ೪. ೪. ೫; —೧೨, —೧೨. ೫. ೫; —೧೮. ೬. ೫೫೪೪೪. ೭. ೧೪೦೦, ೭. ೯೦೦, ೨೦೦೦. ೮. ೧೦೦೦ ೧೦೦೦ ಮೈಲಿಗಳ ಮೇಲೆ ೫ ೫೦೦೦

ಪತ್ರಿಕೆ ಳನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೩.

೧. (ಪ-ಬ)(ಬ-ಮ)(ಮ+ಪ); (ಪ-ಬ+ಮ)(ಪ+ಬ-ಮ-೧);
 $\left(\frac{ಯ}{ಪ} + ೧ + \frac{ಅ}{ಮ} \right) \left(\frac{ಯ}{ಪ} - ೧ \frac{ಅ}{ಮ} \right)$. ೨. —೨; ಲ.

೩. $\frac{(ಯ-೨)(೩-ಯ)}{ಯ}$; $\frac{೨}{(ಪ-ಮ)}$ ೪. ೪೬; ೨, ೧. ೫.

೬. ೪೬; ೬೪. ೭. ೧, ೧; ೪೬+ಯ = ೫, ೬+೪ಯ = ೫.
 ಲ. ೩೦೦ ಮೈ.

ಪತ್ರಿಕೆ ೫ನೆಯದು.

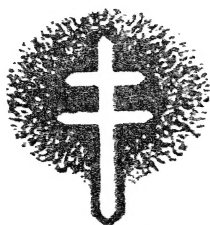
ಪು. ೨೪೪.

೨. (ಯ-೧)(೩ಯ-೧)(೫ಯ-೪) ; $\left(೨ಯ-೧ + \frac{೧}{೩ಯ} \right)$
 $\left(೪ಯ+೨ಯ + \frac{೧}{೩} + \frac{೧}{೩ಯ} + \frac{೧}{೬ಯ} \right)$; ಯರ(೮-ಯ)
 (೮+ಯ)(೮+ಯ). ೩. ೫, ೫, ೨. ೪. ೨೧/(ಯ-೫)(ಯ-೧೬);
 —೨ಬಮ/ಪ. ೫. ಯ-ಅಯ+೧. ೬. ೭೫ರೂ.; ೧೫೫ರೂ. ೧೦೦ ರೂ.
 ೭. ೧೧೬೦೦ರೂ.; ೩೪೦೦ರೂ. ಲ. ಲ, ೧೫.

ಪತ್ರಿಕೆ ೬ನೆಯದು.

ಪು. ೨೪೬.

೧. (ಯ-೮)/(ಯ+೨). ೨. ಯ-೨೫;(ಯ-೨೫)(ಯ+೮)
 (ಯ+೨)(೩ಯ-೨ಯ+೨). ೩. (ಯ-೨)(ಯ+೧)(೪ಯ-೭);
 (೨ಯ-೮-೩೪)(೪ಯ+೮+೬೪+೨ಯರ-೩೮೪+೬೪ಯ) :
 (ಯ+೮-೫)(ಯ+೮+೮). ೪. ೫;—೨; ೨, ೨. ೬. ಪ+ಬ+ಮ-
 ೩ಯ. ೭. ೮೫. ಲ. ೮೫.



ಪ್ರಯೋಗದ ನಿವಾರಣೆಗೆ
ನಿರವಾಳಿ

EXPLICIT ALGEBRA, Part III (Kannada)

By P. S. Katti and V. P. Khanolkar

Price Rs. 2-4-0.

